

线性空间与线性变换

“从齐次线性方程组谈起。。。 ”

Jingbo Xia

2026秋——人工智能2401/2402

线性代数习题（齐次线性方程组）

求下列齐次线性方程组的基础解系，并给出该齐次线性方程组的解的结构。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

线性代数习题（齐次线性方程组）

求下列齐次线性方程组的基础解系，并给出该齐次线性方程组的解的结构。

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

解： 该齐次线性方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对 A 作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow -\frac{1}{4}R_2 \\ R_3 \leftarrow R_3 + R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因而原方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

令自由变量 $x_3 = s$, $x_4 = t$, 则

$$x_1 = -s, \quad x_2 = -t, \quad x_3 = s, \quad x_4 = t.$$

因此通解为

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

所以，该齐次线性方程组的一组基础解系为

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \dim S = 2.$$

①	集合、数域、映射	8
②	线性空间	32
•	从齐次线性方程组的解向量集合说起	33
•	线性空间（向量空间）的定义与例子	48
•	空间的基	68
•	基与坐标、基变换与坐标变换	87
•	线性子空间	127
•	子空间的交与和	143
③	线性变换	154
•	线性变换及其运算	155
•	线性变换的矩阵表示	181
•	特征值与特征向量	207

1	集合、数域、映射	8
2	线性空间	32
	• 从齐次线性方程组的解向量集合说起	33
	• 线性空间（向量空间）的定义与例子	48
	• 空间的基	68
	• 基与坐标、基变换与坐标变换	87
	• 线性子空间	127
	• 子空间的交与和	143
3	线性变换	154
	• 线性变换及其运算	155
	• 线性变换的矩阵表示	181
	• 特征值与特征向量	207

1. 集合、数域、映射

集合, 集合的运算封闭



【定义1-1】集合与元素

集合 (Set) 是具有某种特定性质的、互不相同的对象的总体; 这些对象称为集合的**元素**。

例1-1: 集合与元素

能否写出刚才的习题中, 对应的集合和元素。



【定义1-2】运算封闭性

当一个**集合**对于某种**运算**具有**封闭性**时, 指对该集合中的任意元素进行该运算后, 得到的结果仍然在这个集合之中。

1. 集合、数域、映射

数域的定义与例子



【定义1-3】数域

一个包含 0 和 1 的非空集合 K ，如果对加法、减法、乘法和除法（除数不为 0）都封闭，则称 K 为一个**数域** (Field)。

例1-2：含 $\sqrt{2}$ 的数域

判断集合

$$K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

是否构成一个数域。

1. 集合、数域、映射

数域的定义与例子



例1-2: 含 $\sqrt{2}$ 的数域

判断集合

$$K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

是否构成一个数域。

解: 集合 K 构成一个数域。下面以乘法封闭性为例:

$$(1 + 2\sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 3 - \sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4 = -1 + 5\sqrt{2}.$$

其中 $-1 \in \mathbb{Q}$, $5 \in \mathbb{Q}$, 所以结果仍在 K 中。

1. 集合、数域、映射

数域的定义与例子



例1-3: 常见数集是否为数域

常见数集 $\mathbb{N}$ (自然数), $\mathbb{Z}$ (整数), $\mathbb{Q}$ (有理数), $\mathbb{R}$ (实数), $\mathbb{C}$ (复数) 是不是数域?



【定义1-4】映射

设 A, B 是两个非空集合。若存在一个法则 f ，使得对任意 $x \in A$ ，在 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 A 到 B 的**映射**，记作

$$f: A \rightarrow B, \quad y = f(x).$$

其中， y 称为 x 在 f 下的**像**。给定 $y \in B$ ，集合

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$$

称为 y 的**原像集合**。若 $A = B$ ，则称 f 为 A 上的**变换**。



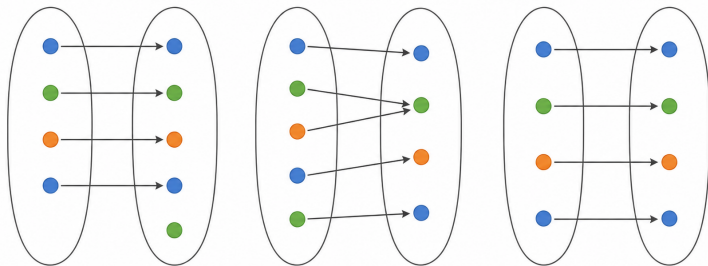
【定义1-5】单射、满射与双射

设 $f: A \rightarrow B$ 。

- 若对任意 $x_1, x_2 \in A$, $f(x_1) = f(x_2)$ 蕴含 $x_1 = x_2$, 则称 f 为**单射**;
- 若对任意 $y \in B$, 都存在 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 即 $f(A) = B$, 则称 f 为**满射**;
- 若 f 既是单射又是满射, 则称 f 为**双射**。

1. 集合、数域、映射

映射的基本概念与例子



从左至右依次为：**单射**（右侧可有未被映到的元素）、**满射**（允许多个原像）、**双射**。



【定义1-6】线性性与线性映射

设 V, W 是同一数域 K 上的线性空间, $f: V \rightarrow W$ 。若对任意 $\alpha, \beta \in V$ 及任意 $k, l \in K$, 有

$$f((k \odot \alpha) \oplus (l \odot \beta)) = (k \odot f(\alpha)) \oplus (l \odot f(\beta)),$$

则称 f 具有线性性, 并称 f 为从 V 到 W 的线性映射。



【定义1-7】幂等性

设 $T: V \rightarrow V$ 是 V 上的一个变换。若对任意 $\alpha \in V$, 有

$$T^2(\alpha) = T(T(\alpha)) = T(\alpha),$$

则称 T 具有**幂等性**, 或称 T 为**幂等变换**。若 T 同时是线性映射, 则称 T 为**幂等线性变换**。

1. 集合、数域、映射

映射的基本概念与例子



例1-4：有限集合上的映射

设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ 。定义映射 $f : A \rightarrow B$, 使得

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = c.$$

指出 1 的像, 并写出映射 f 的值域。

1. 集合、数域、映射

映射的基本概念与例子



例1-4：有限集合上的映射

设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ 。定义映射 $f: A \rightarrow B$, 使得

$$f(1) = a, \quad f(2) = b, \quad f(3) = c.$$

指出 1 的像, 并写出映射 f 的值域。

解： 1 的像为 a 。映射 f 的值域是 $\{a, b, c\}$ 。



例1-5: $\mathbb{R}^2$ 中的矩阵映射

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(\alpha) = A\alpha.$$

- 求向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 在映射 f 下的像;
- 判断 f 是否为线性映射;
- 判断 f 是否为单射、满射和双射。



例1-5: $\mathbb{R}^2$ 中的矩阵映射

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(\alpha) = A\alpha.$$

- 求向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 在映射 f 下的像;
- 判断 f 是否为线性映射;
- 判断 f 是否为单射、满射和双射。

1. 集合、数域、映射

映射的基本概念与例子



解:

•

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- 对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ 及任意实数 k, l , 有

$$f(k\alpha + l\beta) = A(k\alpha + l\beta) = kA\alpha + lA\beta = kf(\alpha) + lf(\beta).$$

故 f 是线性映射。

1. 集合、数域、映射

映射的基本概念与例子



- $$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

故 $\mathbf{A}$ 可逆。若 $f(\alpha) = f(\beta)$, 则 $\mathbf{A}(\alpha - \beta) = \mathbf{0}$; 左乘 $\mathbf{A}^{-1}$ 得 $\alpha = \beta$, 故 f 为单射。对任意 $\gamma \in \mathbb{R}^2$, 取 $\alpha = \mathbf{A}^{-1}\gamma$, 则 $f(\alpha) = \gamma$, 故 f 为满射。因此 f 是双射。

1. 集合、数域、映射

映射的基本概念与例子



例1-6: $\mathbb{R}^n$ 中的矩阵映射

设 A 是一个给定的 n 阶实方阵, 定义映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为

$$f(\alpha) = A\alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

判断该映射是否为线性映射, 以及是否为单射、满射和双射。

1. 集合、数域、映射

映射的基本概念与例子



例1-7: $\mathbb{R}^n$ 中的投影映射

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 设 $\beta \in \mathbb{R}^n$ 是一个给定的非零固定向量。定义映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

说明该映射的几何意义, 并计算一个具体投影。

1. 集合、数域、映射

映射的基本概念与例子



例1-7: $\mathbb{R}^n$ 中的投影映射

在 $\mathbb{R}^n$ 中, 设 $\beta \in \mathbb{R}^n$ 是一个给定的非零固定向量。定义映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

说明该映射的几何意义, 并计算一个具体投影。



解： 其中 $(\cdot, \cdot)$ 表示向量 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积。此映射 f 将任意向量 α 投影到固定向量 β 所在直线上。

- **线性性**：由内积的双线性性可知， f 是一个线性映射。即：

$$f(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2) = k_1f(\alpha_1) + k_2f(\alpha_2).$$

- **幂等性**：投影后再投影，结果不变：

$$f(f(\alpha)) = f(\alpha).$$

因此 $f \circ f = f$ 。

1. 集合、数域、映射

映射的基本概念与例子



在 $\mathbb{R}^2$ 中, 取固定向量 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, 考虑向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. 计算其投影:

$$(\alpha, \beta) = 3 \times 2 + 4 \times 0 = 6,$$

$$(\beta, \beta) = 2 \times 2 + 0 \times 0 = 4,$$

$$f(\alpha) = \frac{6}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

投影结果 $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 正是 α 在 x 轴 (β 方向) 上的正交投影。

1. 集合、数域、映射

映射的基本概念与例子



小结：正交投影映射 f 是满足幂等性的线性映射，它反映了将高维向量“压缩”到低维子空间（此处为一维直线）的基本操作，是几何与代数结合的典范。

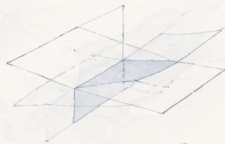
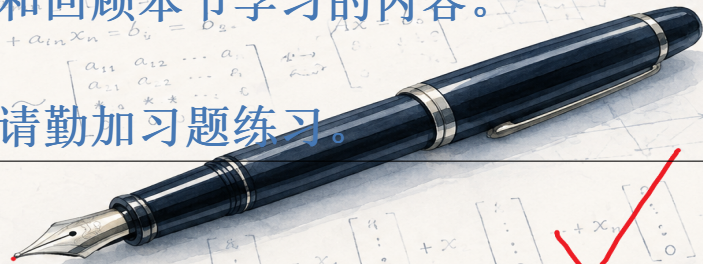
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = b$$

请总结和回顾本节学习的内容。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 = 0, 2, \dots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

请勤加习题练习。



$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = b_+$$

1	集合、数域、映射	8
2	线性空间	32
•	从齐次线性方程组的解向量集合说起	33
•	线性空间（向量空间）的定义与例子	48
•	空间的基	68
•	基与坐标、基变换与坐标变换	87
•	线性子空间	127
•	子空间的交与和	143
3	线性变换	154
•	线性变换及其运算	155
•	线性变换的矩阵表示	181
•	特征值与特征向量	207

1	集合、数域、映射	8
2	线性空间	32
•	从齐次线性方程组的解向量集合说起	33
•	线性空间（向量空间）的定义与例子	48
•	空间的基	68
•	基与坐标、基变换与坐标变换	87
•	线性子空间	127
•	子空间的交与和	143
3	线性变换	154

2. 线性空间

从齐次线性方程组的解向量集合说起



考虑一个包含 m 个方程、 n 个未知数的齐次线性方程组：

$$A\alpha = 0$$

其中：

- $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 是一个 $m \times n$ 的系数矩阵：
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
- $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ 是 n 维未知数向量：
- $0 = (0, 0, \dots, 0)^\top$ 是 m 维零向量

2. 线性空间

从齐次线性方程组的解向量集合说起



方程组的详尽展开形式

将矩阵方程 $A\alpha = 0$ 展开为传统的线性方程组形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

或者更紧凑地, 对于每个 $i = 1, 2, \dots, m$, 有:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

2. 线性空间

从齐次线性方程组的解向量集合说起



命题2-1: 解向量的集合满足加法和数乘的运算封闭性

记该齐次线性方程组的解集为:

$$S = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid A\alpha = 0\}$$

可以验证, S 对向量加法和数乘运算封闭, 且包含零向量。

2. 线性空间

从齐次线性方程组的解向量集合说起



命题2-1(1) 加法封闭性

设 $\alpha, \beta \in S$, 即 $A\alpha = 0$ 且 $A\beta = 0$ 。

考虑 $\alpha + \beta$:

$$A(\alpha + \beta) = A\alpha + A\beta = 0 + 0 = 0$$

因此 $\alpha + \beta \in S$, 加法封闭性得证。

2. 线性空间

从齐次线性方程组的解向量集合说起



命题2-1(2). 数乘封闭性

设 $\alpha \in S$ (即 $A\alpha = 0$), $k \in \mathbb{R}$ 为任意标量。

考虑 $k\alpha$:

$$A(k\alpha) = k(A\alpha) = k0 = 0$$

因此 $k\alpha \in S$, 数乘封闭性得证。

命题2-1(3). 零向量属于 S

显然有 $A0 = 0$, 故 $0 \in S$ 。

2. 线性空间

从齐次线性方程组的解向量集合说起



命题2-2: 解空间虽包含无穷多向量, 但可由有限个线性无关的向量生成

设齐次线性方程组 $A\alpha = 0$ 的解空间为 S , 且系数矩阵 A 的秩 $\text{rank}(A) = r$ 。

若 $r < n$, 则解空间 S 是无限集, 但存在由 $n - r$ 个解向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 构成的基础解系, 满足:

- $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关;
- S 中任一解向量 α 均可由它们线性表出, 即存在常数 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$, 使得

$$\alpha = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r}.$$

命题2-2(1). 解向量集合中包含无穷个元素

当 $r < n$ 时, 方程组有自由未知量。对自由未知量任意赋值, 都能得到相应的解向量。由于自由未知量可在实数域内任意取值, 故解向量有无限多个。



命题2-2(2). 基础解系的构造与线性无关性

通过高斯消元法将系数矩阵化为行最简形后，可构造出 $n - r$ 个特解：

- 依次令一个自由未知量为 1，其余自由未知量为 0。
- 回代求得相应主元的值，由此得到解向量 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 。

由构造方法可知，这些解向量对应的自由未知量分量构成的向量组是单位坐标向量组，因此它们是线性无关的。



命题2-2(3). 任意解向量可由基础解系线性表出

设 $\alpha = (c_1, c_2, \dots, c_n)^\top$ 是 S 中的任意一个解向量, 其自由未知量的取值记为 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ 。

考虑向量 $\beta = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$ 。

- 首先, β 是 ξ_i 的线性组合, 而 ξ_i 均为解向量, 根据解向量集合 S 的封闭性, $\beta \in S$ 。
- 其次, β 的自由未知量取值恰好也是 $k_1, k_2, \dots, k_{n-r}$ 。

由于一个解向量由其自由未知量的取值唯一确定, 因此必有 $\alpha = \beta$, 即 α 可由基础解系线性表出。

2. 线性空间

从齐次线性方程组的解向量集合说起



齐次线性方程组解空间：命题总结

命题2-1：解向量的集合满足加法和数乘的运算封闭性

齐次线性方程组 $A\alpha = 0$ 的解集

$$S = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid A\alpha = 0\}$$

对加法和数乘封闭，且包含零向量。

验证要点：

- 加法封闭性；
- 数乘封闭性；
- 零向量属于 S 。

命题2-2：解空间虽包含无穷多向量，但可由有限个线性无关的向量生成

若 $\text{rank}(A) = r < n$ ，则 S 中有无穷多个向量；但存在 $n - r$ 个线性无关的解向量构成基础解系，且任一解向量均可由其线性表出。

验证要点：

- 解向量集合中包含无穷个元素；
- 基础解系的构造与线性无关性；
- 任意解向量可由基础解系线性表出。

2. 线性空间

从齐次线性方程组的解向量集合说起



例2-1：齐次线性方程组的基础解系

考虑齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

求该方程组的一组基础解系。

2. 线性空间

从齐次线性方程组的解向量集合说起



例2-1：齐次线性方程组的基础解系

考虑齐次线性方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

求该方程组的一组基础解系。

2. 线性空间

从齐次线性方程组的解向量集合说起



解： 其系数矩阵的秩为 $r = 1$ (两方程线性相关)，实际仅有一个有效方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ 。未知数个数 $n = 4$ ，故自由变量个数 $n - r = 3$ 。

求解过程 选取 x_2, x_3, x_4 为自由变量，将原方程改写为 $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$ 。基础解系应包含 3 个线性无关的解向量，通过依次令一个自由变量为 1、其余为 0 来构造：

1. 令 $(x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0)$ ，得 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2. 令 $(x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0)$ ，得 $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 3. 令

$(x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1)$ ，得 $\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. 线性空间

从齐次线性方程组的解向量集合说起



验证与结论 向量组 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关（其后三个分量构成单位矩阵），且方程组的任意解 α 均可表示为它们的线性组合：

$$\alpha = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3 = \begin{pmatrix} -k_1 - k_2 - k_3 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$$

因此， $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ 构成该一组基础解系。

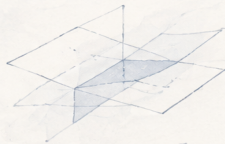
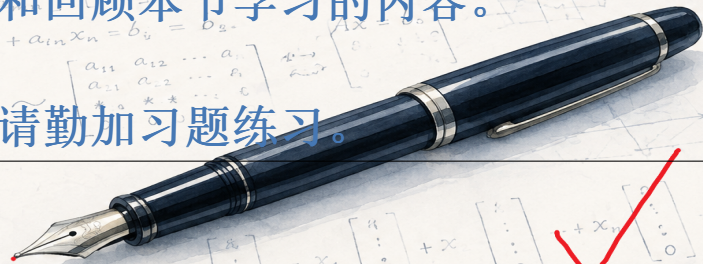
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = b$$

请总结和回顾本节学习的内容。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 = 0, 2, \dots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

请勤加习题练习。



$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = b_+$$

1	集合、数域、映射	8
2	线性空间	32
	从齐次线性方程组的解向量集合说起	33
	线性空间（向量空间）的定义与例子	48
	空间的基	68
	基与坐标、基变换与坐标变换	87
	线性子空间	127
	子空间的交与和	143
3	线性变换	154

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



【定义2-1】线性空间

设 V 是一个非空集合， K 是一个数域。在 V 上定义两种运算：

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, \quad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \oplus \beta; \quad \odot : K \times V \rightarrow V, \quad (k, \alpha) \mapsto k \odot \alpha.$$

若以下八条公理对任意 $\alpha, \beta, \gamma \in V$ 及任意 $k, l \in K$ 成立，则称 V 是数域 K 上的**线性空间** (Vector Space)。

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



线性空间八条公理

加法公理

- 加法交换律: $\alpha \oplus \beta = \beta \oplus \alpha$
- 加法结合律: $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$
- 零元存在: 存在 $\mathcal{O} \in V$, 使得 $\alpha \oplus \mathcal{O} = \alpha$
- 负元存在: 对每个 $\alpha \in V$, 存在 $-\alpha \in V$, 使得 $\alpha \oplus (-\alpha) = \mathcal{O}$

数乘公理

- 数乘单位元: $1 \odot \alpha = \alpha$, 其中 1 是 K 中的乘法单位元。
- 数乘结合律: $k \odot (l \odot \alpha) = (kl) \odot \alpha$

分配律

- 数乘对向量加法的分配律: $k \odot (\alpha \oplus \beta) = (k \odot \alpha) \oplus (k \odot \beta)$
- 数乘对标量加法的分配律: $(k + l) \odot \alpha = (k \odot \alpha) \oplus (l \odot \alpha)$

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



例2-2：齐次方程组的解向量集合

上节中的解向量集合 S 对向量的普通加法和数乘，是否构成线性空间？为什么？

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



例2-3：多项式空间

设系数在数域 K 上的全体多项式集合为

$$P[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K\}.$$

判断系数在数域 K 上的全体多项式集合 $P[x]$ 是否构成数域 K 上的线性空间。

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



例2-3：多项式空间

设系数在数域 K 上的全体多项式集合为

$$P[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}_0, a_i \in K\}.$$

判断系数在数域 K 上的全体多项式集合 $P[x]$ 是否构成数域 K 上的线性空间。

解：在 $P[x]$ 上取通常的多项式加法和数乘：

$$(p \oplus q)(x) = p(x) + q(x), \quad (k \odot p)(x) = kp(x).$$

设

$$p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i, \quad a_i, b_i \in K.$$

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



将系数补零至同一最高次数 $r = \max\{m, n\}$ 。于是

$$(p \oplus q)(x) = \sum_{i=0}^r (a_i + b_i)x^i \in P[x],$$

因为 $a_i + b_i \in K$ ；并且，对任意 $k \in K$ ，

$$(k \odot p)(x) = \sum_{i=0}^m (ka_i)x^i \in P[x],$$

因为 $ka_i \in K$ 。故 $P[x]$ 对加法和数乘都封闭。

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



以下逐一验证线性空间的八条公理。任取 $p, q, h \in P[x]$ 及 $k, l \in K$:

- 加法交换律:

$$p \oplus q = p + q = q + p = q \oplus p.$$

- 加法结合律:

$$(p \oplus q) \oplus h = (p + q) + h = p + (q + h) = p \oplus (q \oplus h).$$

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



- 零元存在： 零多项式 $0(x) = 0$ 属于 $P[x]$ ， 且

$$p \oplus 0 = p + 0 = p.$$

所以

$$\mathcal{O} = 0$$

- 负元存在： $-p(x) = \sum_{i=0}^m (-a_i)x^i \in P[x]$ ， 且

$$p \oplus (-p) = p + (-p) = 0.$$



2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子

- 数乘单位元:

$$1 \odot p = 1p = p.$$

- 数乘结合律:

$$k \odot (l \odot p) = k(lp) = (kl)p = (kl) \odot p.$$

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



- 数乘对向量加法的分配律:

$$k \odot (p \oplus q) = k(p + q) = kp + kq = (k \odot p) \oplus (k \odot q).$$

- 数乘对标量加法的分配律:

$$(k + l) \odot p = (k + l)p = kp + lp = (k \odot p) \oplus (l \odot p).$$

因此, $P[x]$ 满足线性空间的全部公理, 是数域 K 上的线性空间。



2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子

例2-4：次数等于 n 的多项式集合

判断数域 K 上次数等于 n 的多项式集合是否构成线性空间。

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



例2-4：次数等于 n 的多项式集合

判断数域 K 上次数等于 n 的多项式集合是否构成线性空间。

解：该集合不构成线性空间。例如，当 $n = 2$ 时，

$$(x^2 + x) + (-x^2 + 1) = x + 1,$$

其次数为 1，不等于 2，因此对加法不封闭。

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



例2-5: $\mathbb{R}_{>0}$ 上的非常规线性空间

令 $V = \mathbb{R}_{>0} = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ 。对任意 $a, b \in V$ 及任意 $k \in \mathbb{R}$ ，定义两种运算

$$a \oplus b = ab, \quad k \odot a = a^k.$$

判断 V 在运算 $\oplus$ 与 $\odot$ 下是否构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



例2-5: $\mathbb{R}_{>0}$ 上的非常规线性空间

令 $V = \mathbb{R}_{>0} = \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ 。对任意 $a, b \in V$ 及任意 $k \in \mathbb{R}$ ，定义两种运算

$$a \oplus b = ab, \quad k \odot a = a^k.$$

判断 V 在运算 $\oplus$ 与 $\odot$ 下是否构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

解： 构成。首先，若 $a, b > 0$ ，则 $a \oplus b = ab > 0$ ；若 $a > 0$ 、 $k \in \mathbb{R}$ ，则

$$k \odot a = a^k = e^{k \ln a} > 0.$$

故两种运算均封闭于 V 。



2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子

以下逐一验证八条公理。任取 $a, b, c \in V$ 及 $k, l \in \mathbb{R}$:

- 加法交换律:

$$a \oplus b = ab = ba = b \oplus a.$$

- 加法结合律:

$$(a \oplus b) \oplus c = (ab)c = a(bc) = a \oplus (b \oplus c).$$

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



- 零元存在：取 $\mathcal{O}_V = 1$ ，则

$$a \oplus \mathcal{O}_V = a \cdot 1 = a.$$

- 负元存在：对任意 $a \in V$ ， $a^{-1} > 0$ ，且

$$a \oplus a^{-1} = aa^{-1} = 1 = \mathcal{O}_V.$$

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



- 数乘单位元:

$$1 \odot a = a^1 = a.$$

- 数乘结合律:

$$k \odot (l \odot a) = k \odot a^l = (a^l)^k = a^{lk} = (kl) \odot a.$$

2. 线性空间及其性质

线性空间（向量空间）的定义与例子



- 数乘对向量加法的分配律:

$$k \odot (a \oplus b) = (ab)^k = a^k b^k = (k \odot a) \oplus (k \odot b).$$

- 数乘对标量加法的分配律:

$$(k + l) \odot a = a^{k+l} = a^k a^l = (k \odot a) \oplus (l \odot a).$$

因此, $V = \mathbb{R}_{>0}$ 在所定义的 $\oplus$ 与 $\odot$ 下满足线性空间的全部公理。

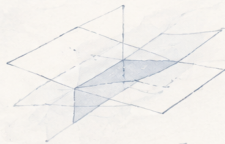
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = b$$

请总结和回顾本节学习的内容。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 = 0, 2, \dots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

请勤加习题练习。



$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = b_+$$

1	集合、数域、映射	8
2	线性空间	32
	◦ 从齐次线性方程组的解向量集合说起	33
	◦ 线性空间（向量空间）的定义与例子	48
	• 空间的基	68
	◦ 基与坐标、基变换与坐标变换	87
	◦ 线性子空间	127
	◦ 子空间的交与和	143
3	线性变换	154

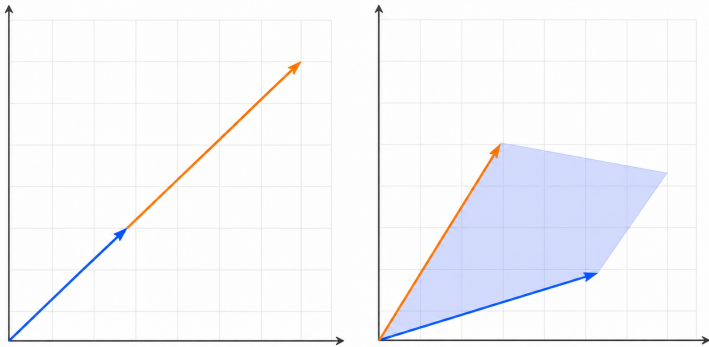


【定义2-2】线性相关与线性无关

- **线性相关** (Linearly Dependent): 存在不全为零的系数 $k_i \in K$, 使得 $(k_1 \odot \alpha_1) \oplus \cdots \oplus (k_n \odot \alpha_n) = \mathcal{O}$, 此时称 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关。
- **线性无关** (Linearly Independent): 只有当所有系数 $k_i = 0$ 时, 才有 $(k_1 \odot \alpha_1) \oplus \cdots \oplus (k_n \odot \alpha_n) = \mathcal{O}$, 此时称 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。

2. 线性空间

空间的基——线性相关与线性无关



左：线性相关，两个向量共线；右：线性无关，两个方向张成平面。

2. 线性空间

空间的基——线性相关与线性无关



例2-6: 数组空间中的向量

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 考察向量组:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

问: 该向量组是否线性相关?

2. 线性空间

空间的基——线性相关与线性无关



例2-6：数组空间中的向量

在 $\mathbb{R}^3$ 中，考察向量组：

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

问：该向量组是否线性相关？

2. 线性空间

空间的基——线性相关与线性无关



解：考虑方程 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mathbf{0}$ ，即：

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

这等价于一个关于 k_1, k_2, k_3 的齐次线性方程组：

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 + 3k_3 = 0 \\ 2k_1 + 2k_2 - 2k_3 = 0 \\ -k_1 + 4k_2 + 11k_3 = 0 \end{cases}$$

2. 线性空间

空间的基——线性相关与线性无关



对系数矩阵进行行化简（过程略），可以发现其秩小于3，方程组存在非零解。例如，可以解得一组非零解为 $(k_1, k_2, k_3) = (3, -2, 1)$ 。经验证：

$$3\alpha_1 - 2\alpha_2 + 1\alpha_3 = \mathbf{0}$$

因此，该向量组线性相关。

2. 线性空间

空间的基——线性相关与线性无关



例2-7：多项式空间中的向量

考虑次数不超过 2 的实系数多项式空间 $\mathbb{P}_2[t]$ ，考察向量（多项式）：

$$p_1(t) = 1 + 2t - t^2, \quad p_2(t) = 3 + 2t + 4t^2, \quad p_3(t) = 3 - 2t + 11t^2.$$

问：该多项式向量组是否线性相关？

2. 线性空间

空间的基——线性相关与线性无关



例2-7：多项式空间中的向量

考虑次数不超过 2 的实系数多项式空间 $\mathbb{P}_2[t]$ ，考察向量（多项式）：

$$p_1(t) = 1 + 2t - t^2, \quad p_2(t) = 3 + 2t + 4t^2, \quad p_3(t) = 3 - 2t + 11t^2.$$

问：该多项式向量组是否线性相关？



解： 同样考虑方程 $k_1p_1(t) + k_2p_2(t) + k_3p_3(t) = 0$ (零多项式)：

$$k_1(1 + 2t - t^2) + k_2(3 + 2t + 4t^2) + k_3(3 - 2t + 11t^2) = 0 + 0t + 0t^2$$

合并同类项后，等价于关于 t 的多项式系数全为零：

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 + 3k_3 = 0 & (\text{常数项系数}) \\ 2k_1 + 2k_2 - 2k_3 = 0 & (t\text{项系数}) \\ -k_1 + 4k_2 + 11k_3 = 0 & (t^2\text{项系数}) \end{cases}$$

2. 线性空间

空间的基——线性相关与线性无关



这个方程组与**例2-6**中的齐次线性方程组完全相同。因此，它也有一组非零解 $(k_1, k_2, k_3) = (3, -2, 1)$ 。所以，该多项式向量组同样**线性相关**。

启示： 对应关系（ α_1 的分量是 $p_1(t)$ 的系数）表明，多项式空间 $\mathbb{P}_2[t]$ 中这个具体的向量组，其线性相关性问题与 $\mathbb{R}^3$ 中对应的坐标向量组的线性相关性问题在代数结构上是等价的。

2. 线性空间

空间的基——线性相关与线性无关



例：在 $K^{2 \times 2}$ 中 试讨论下列矩阵组的线性相关性.

$$(1) E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{12} + \lambda_3 E_{21} + \lambda_4 E_{22} = 0 \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

只有零解, 则 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 线性无关.



【定义2-3】基与维数

线性空间 V 的一个向量组 $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ 如果满足：

- 线性无关；
- V 中任何向量都可由 $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ 线性表示，

则称这个向量组是 V 的一组**基** (Basis)。若 V 的任一基均含 n 个向量，则称 V 的**维数** (Dimension) 为 n ，记作 $\dim(V) = n$ 。

2. 线性空间

空间的基——基的定义



V : 线性空间 $(\oplus, \circ)$

基: 一组向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in V$

- i) 线性无关
- ii) 可以组合出任意 V 中向量

维数: n

Diagram 1: A circle containing vectors $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$.

Diagram 2: A square labeled $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ containing a circle with vectors $E_{11}, -E_{12}, E_{21}, E_{22}$.

Diagram 3: A square labeled V containing a circle labeled W with vectors $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$.



例2-8: $\mathbb{R}^3$ 的标准基

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 标准基为

$$\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}.$$



例2-8: $\mathbb{R}^3$ 的标准基

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 标准基为

$$\mathcal{B} = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}.$$

解: 它们是线性无关的, 且任何向量 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ 都可以表示为

$$xe_1 + ye_2 + ze_3.$$

因此, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ 。



例2-9：解向量空间的基

设 $S = \{\alpha \mid A\alpha = 0\}$ 是齐次线性方程组的解向量空间。说明基础解系与 S 的基、维数之间的关系。



例2-9: 解向量空间的基

设 $S = \{\alpha \mid A\alpha = 0\}$ 是齐次线性方程组的解向量空间。说明基础解系与 S 的基、维数之间的关系。

解: 解向量空间 $S = \{\alpha \mid A\alpha = 0\}$ 中的基础解系是一组基。因此,

$$\dim(S) = n - r,$$

其中 n 是未知数个数, r 是 A 的秩。

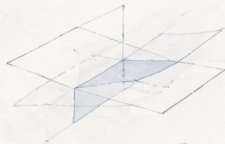
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = b$$

请总结和回顾本节学习的内容。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 = 0, 2, \dots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

请勤加习题练习。



$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = b$$

1	集合、数域、映射	8
2	线性空间	32
•	从齐次线性方程组的解向量集合说起	33
•	线性空间（向量空间）的定义与例子	48
•	空间的基	68
•	基与坐标、基变换与坐标变换	87
•	线性子空间	127
•	子空间的交与和	143
3	线性变换	154



【定义2-4】向量在一组基下的坐标

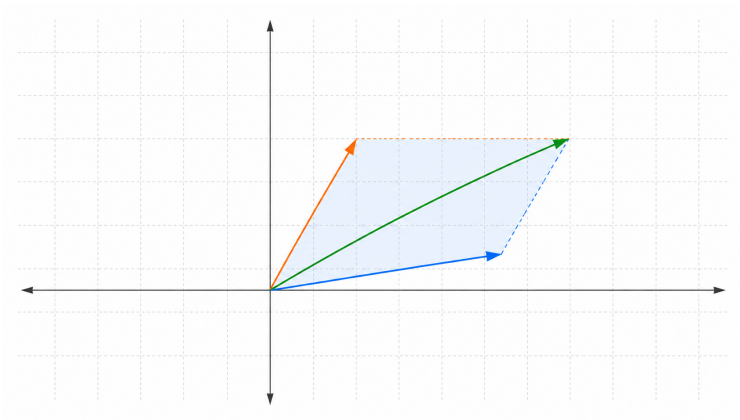
设 $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\}$ 是 V 的一组基。对于任意 $\alpha \in V$ ，存在唯一的一组数 $k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ ，使得

$$\alpha = (k_1 \odot \epsilon_1) \oplus (k_2 \odot \epsilon_2) \oplus \cdots \oplus (k_n \odot \epsilon_n)$$

有序数组 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ 称为向量 α 在基 $\{\epsilon_i\}$ 下的**坐标**。

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



绿色向量可由蓝、橙两个基向量线性表示。



例2-10: $\mathbb{R}^3$ 标准基下的坐标

判断下面向量组是否为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



例2-10: $\mathbb{R}^3$ 标准基下的坐标

判断下面向量组是否为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



解：最熟悉的基是 $\mathbb{R}^3$ 的标准基：

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

它们线性无关，且 $\mathbb{R}^3$ 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a, b, c)^\top$ 可唯一表为

$$a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3.$$

向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在这组基下的坐标就是 (a, b, c) ，这说明标准基为我们建立了最自然的坐标系。



例2-11: $\mathbb{P}_2[t]$ 的幂基

判断向量组 $\{1, t, t^2\}$ 是否为 $\mathbb{P}_2[t]$ 的一组基。



例2-11: $\mathbb{P}_2[t]$ 的幂基

判断向量组 $\{1, t, t^2\}$ 是否为 $\mathbb{P}_2[t]$ 的一组基。

解： 考虑次数不超过 2 的实系数多项式空间 $\mathbb{P}_2[t] = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ 。向量组 $\{1, t, t^2\}$ 是 $\mathbb{P}_2[t]$ 最常用的一组基，称为**幂基**。

- **验证线性无关：** 设 $k_0 \cdot 1 + k_1 \cdot t + k_2 \cdot t^2 = 0$ （零多项式）。由多项式相等条件，必须 $k_0 = k_1 = k_2 = 0$ 。
- **验证生成整个空间：** 任意多项式 $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ 显然可写为 $a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$ 。
- **坐标：** 多项式 $p(t)$ 在幂基 $\{1, t, t^2\}$ 下的坐标就是其系数按幂次排列的有序数组 (a_0, a_1, a_2) 。



例2-12: 对称矩阵空间中的向量

考虑集合

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

问:

(1) V 是否构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间?

(2) 若

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 11 \end{pmatrix},$$

判断矩阵向量组 A_1, A_2, A_3 是否线性相关。



例2-12: 对称矩阵空间中的向量

考虑集合

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

问:

(1) V 是否构成实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间?

(2) 若

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 11 \end{pmatrix},$$

判断矩阵向量组 A_1, A_2, A_3 是否线性相关。

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



解:

(1) 判断 V 是否为线性空间

显然, 零矩阵

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V,$$

因此 V 非空。

任取

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \in V,$$

则

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{pmatrix} \in V.$$

因此, V 对矩阵加法封闭。

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



再任取 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda b_1 & \lambda c_1 \end{pmatrix} \in V.$$

因此, V 对数乘运算封闭。

由于 V 是矩阵空间 $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ 的非空子集, 并且对矩阵加法和数乘运算均封闭, 所以

V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.



(2) 判断 A_1, A_2, A_3 是否线性相关
由于

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

任意矩阵 $A \in V$ 都可以唯一表示为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



因此, 取 V 的一组基

$$\mathcal{B} = \left\{ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

于是

$$\dim V = 3.$$

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



下面求三个矩阵在基 $\mathcal{B}$ 下的坐标。
对于

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

有

$$A_1 = B_1 + 2B_2 - B_3,$$

因此

$$A_1 = (B_1, B_2, B_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



类似地,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 3B_1 + 2B_2 + 4B_3,$$

故

$$A_2 = (B_1, B_2, B_3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



又

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 11 \end{pmatrix} = 3B_1 - 2B_2 + 11B_3,$$

故

$$A_3 = (B_1, B_2, B_3) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



因此, 判断矩阵向量组 A_1, A_2, A_3 的线性相关性, 等价于判断它们在基 B 下的坐标向量组

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

在 $\mathbb{R}^3$ 中是否线性相关。

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



考虑

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

得到齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 + 3k_3 = 0, \\ 2k_1 + 2k_2 - 2k_3 = 0, \\ -k_1 + 4k_2 + 11k_3 = 0. \end{cases}$$

该方程组有非零解

$$(k_1, k_2, k_3) = (3, -2, 1).$$

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



所以坐标向量组 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}$ 线性相关。

由于取坐标保持向量的线性关系，因此

$$A_1, A_2, A_3 \text{ 线性相关.}$$

事实上，

$$3A_1 - 2A_2 + A_3 = O.$$

启示：

在有限维线性空间中，选定一组基以后，每个向量都可以唯一地表示为一个坐标向量。因此，可以把抽象线性空间中的线性相关性问题，转化为 $\mathbb{R}^n$ 中坐标向量的线性相关性问题。



本例中，在基

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

下，有对应关系

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

因此，对称矩阵空间 V 中的线性相关性问题，可以转化为 $\mathbb{R}^3$ 中坐标向量的线性相关性问题。



例2-13: 同一向量在不同基下的坐标

求多项式 $p(t) = 3 + 2t - t^2$ 分别在基

$$\{1, t, t^2\}, \quad \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$$

下的坐标。



例2-13: 同一向量在不同基下的坐标

求多项式 $p(t) = 3 + 2t - t^2$ 分别在基

$$\{1, t, t^2\}, \quad \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$$

下的坐标。

解: 同一个多项式 $p(t) = 3+2t-t^2$ 在不同基下的坐标不同。在基 $\{1, t, t^2\}$ 下的坐标是 $(3, 2, -1)$ 。考虑另一组基 $\{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ 。为求 $p(t)$ 在这组基下的坐标 (x_1, x_2, x_3) ，需解方程：

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot (1+t) + x_3 \cdot (1+t+t^2) = 3 + 2t - t^2$$

整理得：

$$(x_1 + x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)t + x_3t^2 = 3 + 2t - t^2.$$

解得 $x_3 = -1$, $x_2 = 3$, $x_1 = 1$ 。故在基 $\{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ 下, $p(t)$ 的坐标为 $(1, 3, -1)$ 。



【定义2-5】基与基的过渡矩阵

设 $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ 是线性空间 V 的另一组基。从基 $\{\epsilon_i\}$ 到基 $\{\eta_i\}$ 的过渡矩阵 P 是一个 $n \times n$ 的可逆矩阵，其定义由下列关系给出：

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) P.$$

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



具体而言, 将每个新基向量 η_j 在旧基 $\{\epsilon_i\}$ 下展开:

$$\eta_j = (p_{1j} \odot \epsilon_1) \oplus (p_{2j} \odot \epsilon_2) \oplus \cdots \oplus (p_{nj} \odot \epsilon_n), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

则系数 p_{ij} 构成了过渡矩阵 $\mathbf{P}$ 的第 j 列:

$$\mathbf{P} = (p_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



定理2-3: 向量坐标变换公式

设向量 $\alpha \in V$ 在基 $\{\epsilon_i\}$ 下的坐标为 a_ϵ , 在基 $\{\eta_i\}$ 下的坐标为 a_η , 即:

$$\alpha = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) a_\epsilon = (\eta_1, \dots, \eta_n) a_\eta.$$

若从基 $\{\epsilon_i\}$ 到基 $\{\eta_i\}$ 的过渡矩阵为 P , 则这两个坐标之间满足如下关系:

$$a_\epsilon = P a_\eta$$

或等价地

$$a_\eta = P^{-1} a_\epsilon.$$

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



证明：由基变换关系 $(\eta_1, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) P$ ，代入 α 在新基下的表示：

$$\begin{aligned}\alpha &= (\eta_1, \dots, \eta_n) a_\eta \\ &= [(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) P] a_\eta \\ &= (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) (P a_\eta).\end{aligned}$$

另一方面， α 在旧基下的表示为 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) a_\varepsilon$ 。由于向量在同一组基下的坐标是唯一的，比较上式可得：

$$a_\varepsilon = P a_\eta.$$

由于过渡矩阵 P 是可逆矩阵，在上式两边同时左乘 P^{-1} ，即得到逆变换公式：

$$a_\eta = P^{-1} a_\varepsilon.$$





例2-14: 利用过渡矩阵求坐标

在多项式空间 $\mathbb{P}_2[t]$ 中, 设旧基

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \{1, t, t^2\},$$

新基

$$\mathcal{B}_\eta = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}.$$

已知多项式 $p(t) = 3 + 2t - t^2$ 在旧基 $\mathcal{B}_\varepsilon$ 下的坐标为

$$\mathbf{a}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

请使用定理2-3, 求 $p(t)$ 在新基 $\mathcal{B}_\eta$ 下的坐标 $\mathbf{a}_\eta$ 。



例2-14: 利用过渡矩阵求坐标

在多项式空间 $\mathbb{P}_2[t]$ 中, 设旧基

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \{1, t, t^2\},$$

新基

$$\mathcal{B}_\eta = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}.$$

已知多项式 $p(t) = 3 + 2t - t^2$ 在旧基 $\mathcal{B}_\varepsilon$ 下的坐标为

$$\mathbf{a}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

请使用定理2-3, 求 $p(t)$ 在新基 $\mathcal{B}_\eta$ 下的坐标 $\mathbf{a}_\eta$ 。



解：新基中的三个基向量在旧基 $\mathcal{B}_\epsilon$ 下的展开分别为

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2,$$

$$1 + t = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2,$$

$$1 + t + t^2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 1 \cdot t^2.$$

因此，从旧基 $\mathcal{B}_\epsilon$ 到新基 $\mathcal{B}_\eta$ 的过渡矩阵由上述三个坐标列向量组成：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



接着通过增广矩阵的行变换求 P 的逆矩阵:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$
$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

所以

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



最后使用定理2-3的逆变换公式:

$$\mathbf{a}_\eta = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}_\varepsilon.$$

代入已知的 $\mathbf{a}_\varepsilon$, 得到

$$\mathbf{a}_\eta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

故 $p(t)$ 在新基 $\mathcal{B}_\eta$ 下的坐标为

$$\mathbf{a}_\eta = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



例2-15: 利用过渡矩阵求坐标

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 设

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

取一组基

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \{\varepsilon_1 = (1, 1, 1)^\top, \quad \varepsilon_2 = (1, 1, 0)^\top, \quad \varepsilon_3 = (1, 0, 0)^\top\}.$$

请仿照例2-14的做法, 使用定理2-3, 求 α 在基 $\mathcal{B}_\varepsilon$ 下的坐标。



例2-15: 利用过渡矩阵求坐标

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 设

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

取一组基

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \{\varepsilon_1 = (1, 1, 1)^\top, \quad \varepsilon_2 = (1, 1, 0)^\top, \quad \varepsilon_3 = (1, 0, 0)^\top\}.$$

请仿照例2-14的做法, 使用定理2-3, 求 α 在基 $\mathcal{B}_\varepsilon$ 下的坐标。



解：取 $\mathbb{R}^3$ 的标准基

$$\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$$

为旧基。新基中的三个基向量在旧基 $\mathcal{E}$ 下的展开分别为

$$\varepsilon_1 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3,$$

$$\varepsilon_2 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,$$

$$\varepsilon_3 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3.$$

因此，从旧基 $\mathcal{E}$ 到新基 $\mathcal{B}_\varepsilon$ 的过渡矩阵由上述三个坐标列向量组成：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



接着通过增广矩阵的行变换求 P 的逆矩阵:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

所以

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



最后使用定理2-3的逆变换公式:

$$\mathbf{a}_\varepsilon = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{a}_\mathcal{E}.$$

由题设,

$$\mathbf{a}_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. 线性空间

基与坐标、基变换与坐标变换



因此

$$\mathbf{a}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故 α 在基 $\mathcal{B}_\varepsilon$ 下的坐标为

$$\boxed{\mathbf{a}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

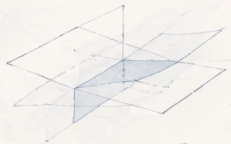
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = b$$

请总结和回顾本节学习的内容。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 = 0, 2, \dots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

请勤加习题练习。



$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = b$$

1	集合、数域、映射	8
2	线性空间	32
◦	从齐次线性方程组的解向量集合说起	33
◦	线性空间（向量空间）的定义与例子	48
◦	空间的基	68
◦	基与坐标、基变换与坐标变换	87
●	线性子空间	127
◦	子空间的交与和	143
3	线性变换	154

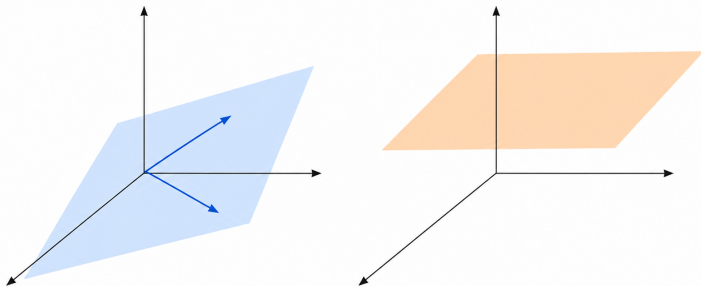


【定义2-6】线性子空间

设 V 是线性空间， W 是 V 的非空子集。如果 W 对 V 中的运算 $\oplus$ 与 $\odot$ 封闭，且在这两种限制运算下也构成线性空间，则称 W 是 V 的一个**线性子空间** (Linear Subspace)。

2. 线性空间

线性子空间



左：平面经过原点；右：平面不经过原点，因而不是 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间。

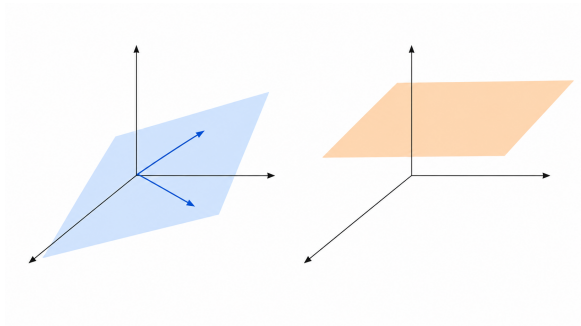
2. 线性空间

线性子空间



例2-16: 判断线性子空间

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 集合 $W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ (xy 平面) 是否是 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间?



几何上, W 是经过原点的 xy 平面; 右侧平面用于对照。



例2-16: 判断线性子空间

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 集合 $W = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ (xy平面) 是否是 $\mathbb{R}^3$ 的线性子空间?

解: 任意两个向量的和仍在此集合中, 数乘任意向量也仍在此集合中, 且包含零向量 $(0, 0, 0)$ 。因此, W 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个线性子空间。

2. 线性空间

线性子空间与生成子空间



定理2-4: 线性子空间的判别法

设 V 是数域 K 上的线性空间, W 是 V 的非空子集。若满足以下两个条件:

- 对任意 $\alpha, \beta \in W$, 有 $\alpha \oplus \beta \in W$ (对加法封闭);
- 对任意 $k \in K$ 及任意 $\alpha \in W$, 有 $k \odot \alpha \in W$ (对数乘封闭),

则 W 是 V 的一个线性子空间。

2. 线性空间

线性子空间与生成子空间



定理2-4: 线性子空间的判别法

设 V 是数域 K 上的线性空间, W 是 V 的非空子集。若满足以下两个条件:

- 对任意 $\alpha, \beta \in W$, 有 $\alpha \oplus \beta \in W$ (对加法封闭);
- 对任意 $k \in K$ 及任意 $\alpha \in W$, 有 $k \odot \alpha \in W$ (对数乘封闭),

则 W 是 V 的一个线性子空间。

为什么只需检验这两个条件?

由于 $W \neq \emptyset$, 取 $\alpha \in W$ 。由数乘封闭性,

$$0 \odot \alpha = \mathcal{O} \in W, \quad (-1) \odot \alpha \in W.$$

因此, 零向量和每个向量的加法逆元都自动属于 W ; 其余线性空间公理由 V 直接继承。故只需检验对加法和数乘的封闭性。



【定义2-7】生成子空间

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in V$ 。由它们生成的子空间定义为

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = \left\{ (k_1 \odot \alpha_1) \oplus (k_2 \odot \alpha_2) \oplus \dots \oplus (k_s \odot \alpha_s) \mid k_1, k_2, \dots, k_s \in K \right\}.$$

称 $L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 为这组向量的生成子空间，也称为它们的线性包。它是包含这组向量的最小线性子空间。

2. 线性空间

线性子空间与生成子空间



例2-17: 求一组向量生成的子空间

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

求生成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2)$, 并写出它的一组基和维数。



例2-17: 求一组向量生成的子空间

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 设

$$\alpha_1 = (1, 1, 0)^T, \quad \alpha_2 = (0, 1, 1)^T.$$

求生成子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2)$, 并写出它的一组基和维数。

解: 由生成子空间的定义,

$$\begin{aligned} L(\alpha_1, \alpha_2) &= \{(k_1 \odot \alpha_1) \oplus (k_2 \odot \alpha_2) \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} k_1 \\ k_1 + k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

2. 线性空间

线性子空间与生成子空间



因此, 若记 $\beta = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$, 则

$$L(\alpha_1, \alpha_2) = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^3 \mid \beta = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}, s = r + t \right\}.$$

这就是 $\mathbb{R}^3$ 中过原点的平面 $s = r + t$ 。



进一步验证这组向量的线性无关性。若有

$$(k_1 \odot \alpha_1) \oplus (k_2 \odot \alpha_2) = \mathcal{O}$$

则第一分量给出 $k_1 = 0$ ，第三分量给出 $k_2 = 0$ ，所以 α_1, α_2 线性无关。因此，这组向量本身就是该生成子空间的一组基，且

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \dim L(\alpha_1, \alpha_2) = 2.$$

2. 线性空间

线性子空间





例2-18: 线性子空间的判别与基

设 $V = \mathbb{R}^n$, 并令

$$W = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \right\}.$$

等价地, 令 $A = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, 则 $W = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX = 0\}$ 。

- 利用线性子空间的判别定理, 证明 W 是 V 的线性子空间;
- 求 W 的一组基, 并确定 $\dim W$ 。



解:

(1) 证明 W 是线性子空间

显然, 零向量 $\mathbf{0} \in W$, 所以 $W \neq \emptyset$. 任取 $X, Y \in W$ 及任意 $k \in \mathbb{R}$, 由 $AX = AY = \mathbf{0}$ 可得

$$A(X + Y) = AX + AY = \mathbf{0}, \quad A(kX) = kAX = \mathbf{0}$$

因此, $X + Y \in W$ 且 $kX \in W$. 由线性子空间的判别定理, W 是 V 的线性子空间.

(2) 求 W 的一组基和维数

由方程 $AX = \mathbf{0}$, 有

$$x_n = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})$$

因此, W 中任意向量 X 都可以表示为

$$X = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \cdots + x_{n-1}\eta_{n-1},$$



(2) 续: 令

$$\eta_i = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_n, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

且 $\mathbf{e}_i$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准基向量。每个 η_i 的分量和为 0, 故 $\eta_i \in W$ 。若

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_{n-1}\eta_{n-1} = \mathbf{0}$$

比较前 $n-1$ 个分量可得 $c_1 = c_2 = \cdots = c_{n-1} = 0$, 所以这些向量线性无关。故

$$\mathcal{B}_W = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}\}, \quad \dim W = n-1$$

1	集合、数域、映射	8
2	线性空间	32
	• 从齐次线性方程组的解向量集合说起	33
	• 线性空间（向量空间）的定义与例子	48
	• 空间的基	68
	• 基与坐标、基变换与坐标变换	87
	• 线性子空间	127
	• 子空间的交与和	143
3	线性变换	154



【定义2-8】子空间的交与和

交 (Intersection): $W_1 \cap W_2 = \{\alpha \in V \mid \alpha \in W_1 \text{ 且 } \alpha \in W_2\}$ 。

和 (Sum): $W_1 + W_2 = \{\alpha \oplus \beta \mid \alpha \in W_1, \beta \in W_2\}$ 。



例2-19: 子空间的交与和

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 设 $W_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ (xy平面), $W_2 = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ (yz平面)。求 $W_1 \cap W_2$ 与 $W_1 + W_2$ 。



例2-19: 子空间的交与和

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 设 $W_1 = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ (xy平面), $W_2 = \{(0, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$ (yz平面)。求 $W_1 \cap W_2$ 与 $W_1 + W_2$ 。

解:

$$W_1 \cap W_2 = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\},$$

即 y 轴。

$$W_1 + W_2 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3.$$

2. 线性空间

子空间的交与和



定理2-5: Grassmann 公式

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2).$$

定理2-6: 生成子空间的和

设 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t \in V$, 则

$$L(\alpha_1, \dots, \alpha_s) + L(\beta_1, \dots, \beta_t) = L(\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_t).$$

【定义2-9】直和

若 $W_1 \cap W_2 = \{\mathcal{O}\}$, 则称 $W_1 + W_2$ 为**直和** (Direct Sum), 记作 $W_1 \oplus W_2$ 。



例2-20: 齐次线性方程解空间的交与和

在 $\mathbb{R}^3$ 中, 设

$$W_1 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\},$$

$$W_2 = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0 \right\}.$$

它们分别是两个齐次线性方程的解空间。求 $W_1 \cap W_2$ 与 $W_1 + W_2$ 。

2. 线性空间

子空间的交与和



解:

(1) 求交空间。设 $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in W_1 \cap W_2$, 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

将该齐次线性方程组的系数矩阵作初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 \leftarrow -\frac{1}{2}R_2 \\ R_1 \leftarrow R_1 - R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



(1) 续: 故 $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}x_3$ 。令自由变量 $x_3 = -2t$, 则

$$x = t\xi_1, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

因此 $\{\xi_1\}$ 是该齐次线性方程组的一组**基础解系**。基础解系就是解空间的一组基, 故

$$W_1 \cap W_2 = L(\xi_1), \quad \mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \{\xi_1\}, \quad \dim(W_1 \cap W_2) = 1.$$



(2) 求和空间。分别取 W_1, W_2 的基础解系（即各自的一组基）为

$$\mathcal{B}_{W_1} = \left\{ \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$
$$\mathcal{B}_{W_2} = \left\{ \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

由定理2-6,

$$W_1 + W_2 = L(\alpha_1, \alpha_2) + L(\beta_1, \beta_2)$$
$$\stackrel{\text{定理2-6}}{=} L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2).$$



(2) 续：对合并后的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 作列向量排列，并对其矩阵作初等行变换：

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

主元列为第 1, 2, 3 列，故原向量组中

$$\mathcal{B}_{W_1+W_2} = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1\}$$

是合并向量组的一个最大线性无关组，也是 $W_1 + W_2$ 的一组基。该基含 3 个向量，故 $W_1 + W_2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的三维子空间。因此

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3.$$

提示：请就此题结果，验证定理2-5中等式成立。

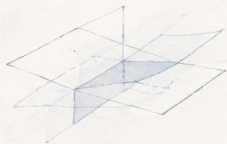
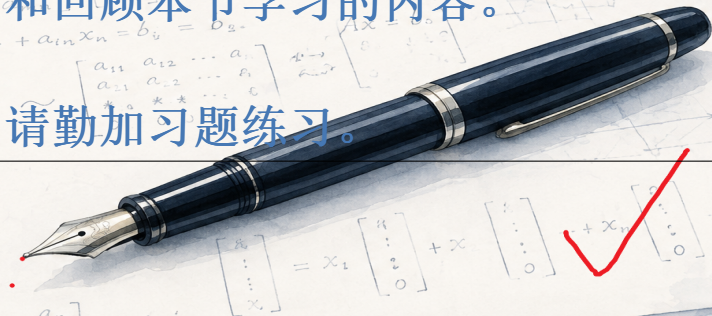
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = b$$

请总结和回顾本节学习的内容。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 = 0, 2, \dots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

请勤加习题练习。



$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = b_+$$

1	集合、数域、映射	8
2	线性空间	32
	• 从齐次线性方程组的解向量集合说起	33
	• 线性空间（向量空间）的定义与例子	48
	• 空间的基	68
	• 基与坐标、基变换与坐标变换	87
	• 线性子空间	127
	• 子空间的交与和	143
3	线性变换	154
	• 线性变换及其运算	155
	• 线性变换的矩阵表示	181
	• 特征值与特征向量	207

1	集合、数域、映射	8
2	线性空间	32
3	线性变换	154
•	线性变换及其运算	155
•	线性变换的矩阵表示	181
•	特征值与特征向量	207

3. 线性变换

线性变换的定义



【定义3-1】线性变换

设 $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 是从线性空间 V 到 V 的映射。如果满足:

- 可加性: $\mathcal{A}(\alpha \oplus \beta) = \mathcal{A}(\alpha) \oplus \mathcal{A}(\beta)$;
- 齐次性: $\mathcal{A}(k \odot \alpha) = k \odot \mathcal{A}(\alpha)$,

则称 $\mathcal{A}$ 为**线性变换** (Linear Transformation)。

3. 线性变换

线性变换的定义



引例：由矩阵乘法诱导的变换

设 $V = \mathbb{R}^n$, 讨论映射 $f: V \rightarrow V$,

$$f(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{A}\mathbf{x},$$

其中 $\mathbf{A}$ 为某个给定的 n 阶矩阵。验证 f 满足以下两条线性性质：

- (加法) $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V, \quad f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2);$
- (数乘) $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x} \in V, \quad f(k\mathbf{x}) = \mathbf{A}(k\mathbf{x}) = k\mathbf{A}\mathbf{x} = kf(\mathbf{x}).$

3. 线性变换

线性变换的定义



从引例到一般定义

一般而言, 若 $\mathcal{A}$ 是 V 上的一个变换, 且 $\mathcal{A}$ 满足上述两条线性性质:

- (加法) $\forall \alpha, \beta \in V$, 有 $\mathcal{A}(\alpha \oplus \beta) = \mathcal{A}(\alpha) \oplus \mathcal{A}(\beta)$;
- (数乘) $\forall k \in \mathbb{R}, \alpha \in V$, 有 $\mathcal{A}(k \odot \alpha) = k \odot \mathcal{A}(\alpha)$,

则称 $\mathcal{A}$ 为 V 上的**线性变换**。

3. 线性变换

线性变换的定义



例3-1: 验证旋转变换是线性变换

设 $V = \mathbb{R}^2$, R_θ 把 V 中向量旋转 θ 角。证明: R_θ 是 V 上的一个线性变换 (例如 $\theta = \frac{\pi}{6}$)。

3. 线性变换

线性变换的定义



分析：需验证

$$R_{\theta}(\alpha + \beta) = R_{\theta}(\alpha) + R_{\theta}(\beta), \quad R_{\theta}(k\alpha) = k R_{\theta}(\alpha).$$

证明：向量 $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 旋转 θ 角后变为

$$R_{\theta}(\alpha) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix}.$$

即 $R_{\theta}(\alpha) = A\alpha$ ，其中 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 。由上一引例的结论，矩阵乘法诱导的变换满足两条线性性质，故 R_{θ} 是 V 上的线性变换。

3. 线性变换

线性变换的定义



例3-2: 判断线性变换

设 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 定义为 $\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y)$ 。

3. 线性变换

线性变换的定义



例3-2: 判断线性变换

设 $\mathcal{A}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 定义为 $\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y)$ 。

解: 通过验证可加性和齐次性, 可知 $\mathcal{A}$ 是一个线性变换。

3. 线性变换

线性变换的定义



【定义3-2】核与像

核 (Kernel): $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in V \mid \mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{O}\}.$

像 (Image): $\text{Im}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}(\alpha) \mid \alpha \in V\}.$

3. 线性变换

线性变换的定义



讨论：例3-1（旋转变换）的核与像

例3-1 中 $R_\theta(\alpha) = A\alpha$ ，其中 $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ （如 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ）。

核：令 $R_\theta(\alpha) = \mathcal{O}$ ，即 $A\alpha = \mathcal{O}$ 。由

$$\det A = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \neq 0,$$

A 可逆，方程组只有零解，故 $\text{Ker}(R_\theta) = \{\mathcal{O}\}$ 。

像： R_θ 可逆（逆变换为 $R_{-\theta}$ ），任意 $\beta \in \mathbb{R}^2$ 都是 $R_{-\theta}(\beta)$ 的像，故 $\text{Im}(R_\theta) = \mathbb{R}^2$ 。

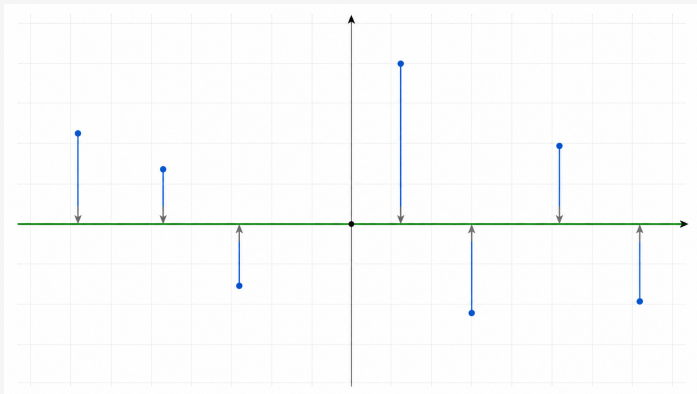
几何直观：旋转保持向量长度，把平面映满整个平面；只有零向量旋转后仍是零向量。此时 $\dim \text{Ker}(R_\theta) + \dim \text{Im}(R_\theta) = 0 + 2 = \dim \mathbb{R}^2$ 。

3. 线性变换

线性变换的定义



讨论：投影 $P(x, y) = (x, 0)$ 的核与像



竖直方向组成核，绿色横轴为像。

3. 线性变换

线性变换的定义



例3-3: 求核与像

对于线性变换 $\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y)$ 。求 $\text{Ker}(\mathcal{A})$ 与 $\text{Im}(\mathcal{A})$ 。

3. 线性变换

线性变换的定义



例3-3: 求核与像

对于线性变换 $\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y)$ 。求 $\text{Ker}(\mathcal{A})$ 与 $\text{Im}(\mathcal{A})$ 。

解: 核: 令 $\mathcal{A}(x, y) = (0, 0)$, 解得 $x = 0, y = 0$ 。所以 $\text{Ker}(\mathcal{A}) = \{(0, 0)\}$ 。

像: 对于 $\mathbb{R}^2$ 中任意向量 (a, b) , 总能找到 (x, y) 使得 $\mathcal{A}(x, y) = (a, b)$ 。所以 $\text{Im}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^2$ 。

3. 线性变换

线性变换的定义



定理3-1: 维数定理

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(\mathcal{A})) + \dim(\text{Im}(\mathcal{A})).$$

3. 线性变换



常见线性变换举例（一）：多项式空间与一般线性空间

例3-4：数乘变换

设 $k \in \mathbb{R}$ 为固定常数，在 $V = P_n[t]$ 上定义

$$\mathcal{K}(p(t)) = k p(t).$$

验证： $\mathcal{K}$ 是 V 上的线性变换。

3. 线性变换



常见线性变换举例（一）：多项式空间与一般线性空间

证明：对任意 $p, q \in P_n[t]$ 与 $c \in \mathbb{R}$ ，由数乘运算律，

$$\mathcal{K}(p + q) = k(p + q) = kp + kq = \mathcal{K}(p) + \mathcal{K}(q),$$

$$\mathcal{K}(cp) = k(cp) = c(kp) = c\mathcal{K}(p).$$

两条线性性质均成立，故 $\mathcal{K}$ 是线性变换。

注： $k = 1$ 与 $k = 0$ 时，数乘变换分别退化为下面的恒等变换与零变换。

3. 线性变换



常见线性变换举例（一）：多项式空间与一般线性空间

例3-5：微商（求导）变换

在 $V = P_n[t]$ 上定义

$$\mathcal{D}(p(t)) = p'(t), \quad \text{即 } \mathcal{D}(a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n) = a_1 + 2a_2t + \cdots + na_nt^{n-1}.$$

验证： $\mathcal{D}$ 是 V 上的线性变换。

3. 线性变换



常见线性变换举例（一）：多项式空间与一般线性空间

证明：对任意 $u, v \in P_n[t]$ 与 $c \in \mathbb{R}$ ，由求导法则

$$\mathcal{D}(u + v) = (u + v)' = u' + v' = \mathcal{D}(u) + \mathcal{D}(v),$$

$$\mathcal{D}(cu) = (cu)' = c u' = c \mathcal{D}(u).$$

两条线性性质均成立，故 $\mathcal{D}$ 是 $P_n[t]$ 上的线性变换。

3. 线性变换



常见线性变换举例（一）：多项式空间与一般线性空间

例3-6：零变换与恒等变换

在任意线性空间 V 上定义：

$$\text{零变换 } \mathcal{O}: \quad \mathcal{O}(\alpha) = \mathbf{0}, \forall \alpha \in V; \quad \text{恒等变换 } \mathcal{E}: \quad \mathcal{E}(\alpha) = \alpha, \forall \alpha \in V.$$

验证： $\mathcal{O}$ 与 $\mathcal{E}$ 都是 V 上的线性变换。

3. 线性变换



常见线性变换举例（一）：多项式空间与一般线性空间

证明：对任意 $\alpha, \beta \in V$ 与 $k \in \mathbb{R}$ ：

$$\mathcal{O}(\alpha + \beta) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathcal{O}(\alpha) + \mathcal{O}(\beta), \quad \mathcal{O}(k\alpha) = \mathbf{0} = k \mathcal{O}(\alpha);$$

$$\mathcal{E}(\alpha + \beta) = \alpha + \beta = \mathcal{E}(\alpha) + \mathcal{E}(\beta), \quad \mathcal{E}(k\alpha) = k\alpha = k \mathcal{E}(\alpha).$$

故 $\mathcal{O}$ 、 $\mathcal{E}$ 都是线性变换。且在任意基下，它们的矩阵分别为零矩阵 $\mathbf{O}$ 与单位矩阵 $\mathbf{I}$ 。

3. 线性变换

常见线性变换举例 (二): 几何空间 $\mathbb{R}^2$



回顾: 旋转变换 (证明见例3-1)

R_θ 把平面向量绕原点旋转 θ 角:

$$R_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

由矩阵乘法诱导, 是线性变换。

3. 线性变换

常见线性变换举例 (二): 几何空间 $\mathbb{R}^2$



例3-7: 投影变换

设 $\beta \neq \mathbf{0}$ 为给定方向, P_β 把向量投影到 β 所在直线上:

$$P_\beta(\alpha) = \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta.$$

验证: P_β 是线性变换。

3. 线性变换

常见线性变换举例 (二): 几何空间 $\mathbb{R}^2$

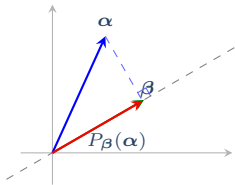


证明: 对任意 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ 与 $k \in \mathbb{R}$, 由内积对第一变元的线性性,

$$P_{\beta}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta = \frac{(\alpha_1, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta + \frac{(\alpha_2, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta = P_{\beta}(\alpha_1) + P_{\beta}(\alpha_2),$$

$$P_{\beta}(k\alpha) = \frac{(k\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta = k \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta = k P_{\beta}(\alpha).$$

两条线性性质均成立, 故 P_{β} 是线性变换。



3. 线性变换



常见线性变换举例（二）：几何空间 $\mathbb{R}^2$

例3-8：反射（镜像）变换

关于 β 所在直线的反射变换：

$$H_{\beta}(\alpha) = 2 P_{\beta}(\alpha) - \alpha.$$

验证： H_{β} 是线性变换。

3. 线性变换

常见线性变换举例 (二): 几何空间 $\mathbb{R}^2$

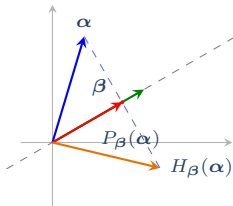


证明: 注意 $H_\beta = 2P_\beta - \mathcal{E}$ 是两个线性变换 (投影 P_β 与恒等 $\mathcal{E}$) 的线性组合。对任意 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ 与 $k \in \mathbb{R}$,

$$H_\beta(\alpha_1 + \alpha_2) = 2P_\beta(\alpha_1 + \alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) = H_\beta(\alpha_1) + H_\beta(\alpha_2),$$

$$H_\beta(k\alpha) = 2P_\beta(k\alpha) - k\alpha = k(2P_\beta(\alpha) - \alpha) = k H_\beta(\alpha).$$

两条线性性质均成立, 故 H_β 是线性变换。



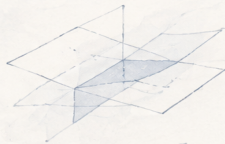
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = b$$

请总结和回顾本节学习的内容。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 = 0, 2, \dots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

请勤加习题练习。



$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = b_+$$

1	集合、数域、映射	8
2	线性空间	32
3	线性变换	154
◦	线性变换及其运算	155
●	线性变换的矩阵表示	181
◦	特征值与特征向量	207

3. 线性变换

线性变换的矩阵表示



【定义3-3】线性变换的矩阵表示

设 $\mathcal{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换 ($\mathcal{A}: V \rightarrow V$)。取定 V 的一组基 $\mathcal{B} = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ 。若 $\mathcal{A}(\epsilon_j) = a_{1j}\epsilon_1 + a_{2j}\epsilon_2 + \dots + a_{nj}\epsilon_n$ ($j = 1, \dots, n$)，则 n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为 $\mathcal{A}$ 在基 $\mathcal{B}$ 下的**矩阵表示**，记作 $A = [\mathcal{A}]_{\mathcal{B}}$ 。

3. 线性变换

线性变换的矩阵表示



例3-9：求线性变换的矩阵

设 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y)$ 。在标准基 $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ 下求 $\mathcal{A}$ 的矩阵。

3. 线性变换

线性变换的矩阵表示



例3-9: 求线性变换的矩阵

设 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A}(x, y) = (x + y, x - y)$ 。在标准基 $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1 = (1, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$ 下求 $\mathcal{A}$ 的矩阵。

解: 把两个基向量的像写成 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ 乘以坐标列向量的形式:

$$\mathcal{A}(\mathbf{e}_1) = (1, 1) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}(\mathbf{e}_2) = (1, -1) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

两式并排拼起来, 坐标列向量依列凑成矩阵 $\mathbf{A}$:

$$(\mathcal{A}(\mathbf{e}_1), \mathcal{A}(\mathbf{e}_2)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}.$$

3. 线性变换

线性变换的矩阵表示



【定义的引入】线性变换 $\mathcal{A}$ 的矩阵 A

设 V 为线性空间, $\dim(V) = n$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基。
由 $\mathcal{A}(\varepsilon_i) \in V$, 故其可由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表出, 不妨设

$$\mathcal{A}(\varepsilon_i) = a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \cdots + a_{ni}\varepsilon_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中坐标列向量就是 $\mathcal{A}(\varepsilon_i)$ 在基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标。

3. 线性变换

线性变换的矩阵表示



【定义的引入】换写法：拼成矩阵

将 n 个等式并排写出：

$$(\mathcal{A}\epsilon_1, \mathcal{A}\epsilon_2, \dots, \mathcal{A}\epsilon_n) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

简记为

$$\mathcal{A}(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \mathbf{A}.$$

矩阵 $\mathbf{A}$ 称为 $\mathcal{A}$ 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ 下的矩阵。

3. 线性变换

线性变换的矩阵表示



性质：基与矩阵唯一决定线性变换

如果 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 确定了, $\mathbf{A}$ 亦确定了, 则 $\mathcal{A}$ 确定了。

分析：对任意 $\alpha \in V$, 设其在该基下的坐标为 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$, 即 $\alpha = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \mathbf{b}$, 则

$$\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \mathbf{b} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \mathbf{A} \mathbf{b}.$$

3. 线性变换

线性变换的矩阵表示



性质：坐标变换公式（总结）

总结：对任意 α ，若其在基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 下的坐标为 b ，则 $\mathcal{A}(\alpha)$ 在该基下的坐标为 Ab 。
换言之，当基 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 与矩阵 A 是确定的，则给出了线性变换 $\mathcal{A}$ 的完整定义。

3. 线性变换

线性变换的矩阵表示



例3-10: 求多项式空间上线性变换的矩阵

设 $V = P_1[t] = \{a_0 + a_1t \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$, $\dim V = 2$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = t$ 是 V 的一组基。定义 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(1) = 1 + 2t, \quad \mathcal{A}(t) = 2 + t.$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\{1, t\}$ 下的矩阵; (2) 对任意 $\alpha = a_0 + a_1t \in V$, 求 $\mathcal{A}(\alpha)$ 。

3. 线性变换

线性变换的矩阵表示



解：(1) 由定义，

$$\mathcal{A}(1, t) = (\mathcal{A}(1), \mathcal{A}(t)) = (1, t) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

即 $\mathcal{A}$ 在基 $\{1, t\}$ 下的矩阵为 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 。

(2) 对任意 $\alpha \in V$ ，设 $\alpha = a_0 + a_1 t$ ，则

$$\mathcal{A}(\alpha) = (1, t) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = (1, t) \begin{pmatrix} a_0 + 2a_1 \\ 2a_0 + a_1 \end{pmatrix} = (a_0 + 2a_1) + (2a_0 + a_1)t.$$

3. 线性变换

基变换对矩阵表示的影响



定理3-2: 基变换下的矩阵相似变换

设 $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 是线性变换。把 $\mathcal{A}$ 在基 $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ 下的矩阵记作 A_β , 把 $\mathcal{A}$ 在基 $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ 下的矩阵记作 A_η 。若 P 是从 β 基到 η 基的过渡矩阵, 即

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) P,$$

则

$$A_\eta = P^{-1} A_\beta P.$$

- 这意味着 A_β 和 A_η 是相似矩阵 (Similar Matrices)。

3. 线性变换

基变换对矩阵表示的影响



例3-11: 考研真题 (2012)——不同基下的矩阵

设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 1, 2)$ 。若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^{-1}AQ = (\quad)$

- (A) $\text{diag}(1, 2, 1)$ (B) $\text{diag}(1, 1, 2)$ (C) $\text{diag}(2, 1, 2)$ (D) $\text{diag}(2, 2, 1)$

3. 线性变换

基变换对矩阵表示的影响



解：由 α 基到新基的过渡矩阵为 C : $Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3) = PC$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。由定理3-2: $Q^{-1}AQ = C^{-1}(P^{-1}AP)C = \text{diag}(1, 1, 2)$, 故选 **(B)**。

3. 线性变换



例3-12：基变换下线性变换的矩阵表示（续）

3. 线性变换



例3-12：基变换下线性变换的矩阵表示（续）

例3-12 的分析：在自然基下求矩阵

由题意， $f(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha$ 。取自然基，将各像的坐标**按列**排列，即得 f 在自然基下的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

当取新基 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 时，

$$f(\alpha_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f(\alpha_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

矩阵 B 的各列需将像在新基下**重新分解**求解——逐列解方程组较为繁琐。有没有更简洁的办法？

3. 线性变换

例3-12 (续): 启示与题目



启示: 用相似变换代替逐列求解

上述分析的启示: 不必在新基下逐个分解像向量, 而是直接利用**基变换下线性变换矩阵的相似变换公式** $B = P^{-1}AP$, 其中 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为从自然基到新基的过渡矩阵。下面按此思路给出例3-12 的完整解答。

3. 线性变换



例3-12 (续): 启示与题目

例3-12: 基变换下线性变换的矩阵表示

已知线性变换 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定义为: $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 + x_3, x_1 - 4x_2, 3x_1)$ 。

- (1) . 求 f 在自然基 $\{e_1, e_2, e_3\}$ 下的矩阵 A
- (2) . 求 f 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵 B



解:

(1) 取自然基 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ 。将基向量分别代入变换, 得到其像在同一组基下的坐标:

$$f(\mathbf{e}_1) = f(1, 0, 0) = (0, 1, 3) = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$$

$$f(\mathbf{e}_2) = f(0, 1, 0) = (2, -4, 0) = 2\mathbf{e}_1 + (-4)\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$

$$f(\mathbf{e}_3) = f(0, 0, 1) = (1, 0, 0) = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$

将所得坐标按列排列, 即得 f 在自然基下的矩阵 $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = [f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3)] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 线性变换

例3-12 的解答



(2) 给定新基:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

设从自然基 $\{e_i\}$ 到新基 $\{\alpha_i\}$ 的过渡矩阵为 P , 即 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (e_1, e_2, e_3)P$. 则 P 就是以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 在自然基下的坐标为列排成的矩阵:

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 线性变换

例3-12 的解答



已知 f 在自然基下的矩阵为 A ，根据基变换下线性变换矩阵的变换公式， f 在新基 $\{\alpha_i\}$ 下的矩阵 B 为：

$$B = P^{-1}AP.$$

3. 线性变换

例3-12 的解答



设线性变换 f 在基 (I) $\{e_i\}$ 和基 (II) $\{\alpha_i\}$ 下的矩阵分别为 A 和 B ，从基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵为 P (满足 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (e_1, e_2, e_3)P$)，则它们之间的关系为：

$$B = P^{-1}AP$$

3. 线性变换

例3-12 的解答



首先求 P 的逆矩阵 P^{-1} 。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(P) = 1 \times (1 \times 0 - 0 \times 0) - 1 \times (1 \times 0 - 0 \times 1) + 1 \times (1 \times 0 - 1 \times 1) = -1.$$

计算伴随矩阵或行变换求得：

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 线性变换

例3-12 的解答



然后计算矩阵乘积:

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. 线性变换

例3-12 的解答



续算矩阵乘积:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ -1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. 线性变换

例3-12 的解答



所以, 线性变换 f 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

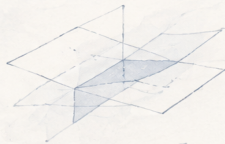
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = b$$

请总结和回顾本节学习的内容。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 = 0, 2, \dots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

请勤加习题练习。



$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = b_+$$

1	集合、数域、映射	8
2	线性空间	32
3	线性变换	154
◦	线性变换及其运算	155
◦	线性变换的矩阵表示	181
●	特征值与特征向量	207

3. 线性变换

特征值与特征向量



【定义3-4】特征值与特征向量

矩阵情形：

若存在非零列向量 α 和标量 λ ，使得矩阵方程 $A\alpha = \lambda\alpha$ 成立，则称 λ 为矩阵 A 的**特征值**， α 为对应的**特征向量**。

线性变换情形：

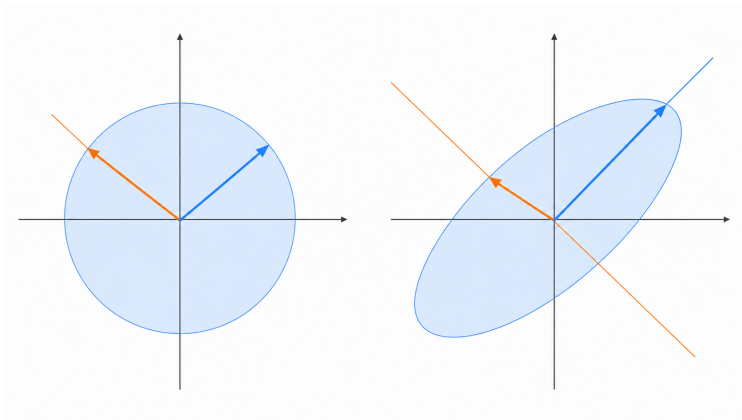
设 $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 是数域 K 上线性空间 V 中的线性变换。如果存在非零向量 $\alpha \in V$ 和标量 $\lambda \in K$ ，使得

$$\mathcal{A}(\alpha) = \lambda \odot \alpha$$

成立，则称 λ 为线性变换 $\mathcal{A}$ 的一个**特征值**， α 为 $\mathcal{A}$ 对应于特征值 λ 的**特征向量**。

3. 线性变换

特征值与特征向量



变换后蓝、橙两个方向保持不变，仅向量长度发生变化。

3. 线性变换

特征值与特征向量



例3-13: 求矩阵的特征值与特征向量

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求其特征值 λ 与对应的特征向量 $\alpha \neq 0$ 满足方程 $A\alpha = \lambda\alpha$ 。

3. 线性变换

特征值与特征向量



例3-13: 求矩阵的特征值与特征向量

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 求其特征值 λ 与对应的特征向量 $\alpha \neq 0$ 满足方程 $A\alpha = \lambda\alpha$ 。

解: 由特征方程 $\det(A - \lambda I) = 0$ 求解特征值:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

解此二次方程得特征值: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ 。

3. 线性变换

特征值与特征向量



其次，对每个特征值求解特征向量：

- 对于 $\lambda_1 = 3$ ：解齐次线性方程组 $(A - 3I)\alpha = 0$ ，即

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

该方程组等价于 $\alpha_1 = \alpha_2$ ，故基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，全部特征向量为 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($k_1 \neq 0$)。

3. 线性变换

特征值与特征向量



- 对于 $\lambda_2 = -1$: 解齐次线性方程组 $(\mathbf{A} + \mathbf{I})\alpha = \mathbf{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

该方程组等价于 $\alpha_1 = -\alpha_2$, 故基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 全部特征向量为 $k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($k_2 \neq 0$).

因此, 矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 3$ 和 $\lambda_2 = -1$, 对应的全部特征向量分别为 $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 和 $k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为非零任意常数。

3. 线性变换

特征值与特征向量



板书示例：多项式空间上线性变换的特征值与特征向量

设 $V = P_1[t] = \{a_0 + a_1 t \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$, $\dim V = 2$, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = t$ 是 V 的一组基。定义 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(1) = 1 + 2t, \quad \mathcal{A}(t) = 2 + t \implies \mathcal{A}(1, t) = (1, t) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

求 $\mathcal{A}$ 的特征值与特征向量。

答案:

$$\mathcal{A}(k_1 + k_1 t) = 3(k_1 + k_1 t), \quad \mathcal{A}(-k_2 + k_2 t) = (-1)(-k_2 + k_2 t), \quad k_1, k_2 \neq 0.$$

3. 线性变换

特征值与特征向量



为什么？化为矩阵的特征问题

设 $\alpha = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)X$ ，其中 X 是 α 在基 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标。当求 $\mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha$ 时，即

$$\mathcal{A}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)X = \lambda(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)X \iff (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)AX = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)(\lambda X),$$

即求解矩阵特征问题 $\boxed{AX = \lambda X}$ 。

例如当 $\lambda = 3$ 时， $X = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，对应的

$$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \begin{pmatrix} k_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = k_1 + k_1 t.$$

3. 线性变换

特征值与特征向量



例3-14: 求线性变换的特征值与特征向量（抽象案例）

设线性空间 $V = P_1[t]$ 为次数不超过 1 的多项式构成的线性空间。定义线性变换 $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 在空间基 $\{1, t\}$ 上的作用为:

$$\mathcal{A}(1) = 1 + 2t, \quad \mathcal{A}(t) = 2 + t.$$

求该线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征值 λ 与对应的特征向量（即非零多项式 $p(t) \in V$ ），满足方程 $\mathcal{A}(p(t)) = \lambda p(t)$ 。

3. 线性变换

特征值与特征向量



例3-14: 求线性变换的特征值与特征向量（抽象案例）

设线性空间 $V = P_1[t]$ 为次数不超过 1 的多项式构成的线性空间。定义线性变换 $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 在空间基 $\{1, t\}$ 上的作用为:

$$\mathcal{A}(1) = 1 + 2t, \quad \mathcal{A}(t) = 2 + t.$$

求该线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征值 λ 与对应的特征向量（即非零多项式 $p(t) \in V$ ），满足方程 $\mathcal{A}(p(t)) = \lambda p(t)$ 。

3. 线性变换

特征值与特征向量



解：首先，将线性变换 $\mathcal{A}$ 在给定的基 $\{1, t\}$ 下表示为矩阵。基向量 1 和 t 在该基下的坐标分别为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。计算它们在 $\mathcal{A}$ 下的像的坐标：

$$\mathcal{A}(1) = 1 + 2t \quad \Rightarrow \quad \text{坐标: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}(t) = 2 + t \quad \Rightarrow \quad \text{坐标: } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

因此，线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\{1, t\}$ 下的矩阵表示为：

$$\mathbf{A}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

接下来，问题转化为求矩阵 $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}$ 的特征值与特征向量，解法与前述矩阵案例完全相同。

3. 线性变换

特征值与特征向量



由特征方程 $\det(\mathbf{A}_{\mathcal{A}} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ 求解特征值:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

解此二次方程得特征值: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ 。

3. 线性变换

特征值与特征向量



其次，对每个特征值求解特征向量：

- 对于 $\lambda_1 = 3$ ：解齐次线性方程组 $(\mathbf{A}_{\mathcal{A}} - 3\mathbf{I})\alpha = \mathbf{0}$ ，即

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

该方程组等价于 $v_1 = v_2$ ，故基础解系对应的坐标向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。将此坐标向量还原为 V 中的多项式，得到对应 $\lambda_1 = 3$ 的特征向量（多项式）为：

$$p_1(t) = k_1 \cdot (1 \cdot 1 + 1 \cdot t) = k_1(1 + t), \quad k_1 \neq 0.$$

3. 线性变换

特征值与特征向量



- 对于 $\lambda_2 = -1$: 解齐次线性方程组 $(\mathbf{A}_{\mathcal{A}} + \mathbf{I})\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

该方程组等价于 $v_1 = -v_2$, 故基础解系对应的坐标向量为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 将此坐标向量还原为 V 中的多项式, 得到对应 $\lambda_2 = -1$ 的特征向量 (多项式) 为:

$$p_2(t) = k_2 \cdot (-1 \cdot 1 + 1 \cdot t) = k_2(-1 + t), \quad k_2 \neq 0.$$



因此, 线性变换 $\mathcal{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 3$ 和 $\lambda_2 = -1$, 对应的全部特征向量 (多项式) 分别为 $k_1(1+t)$ 和 $k_2(-1+t)$, 其中 k_1, k_2 为非零任意常数。

总结: 此例中, 线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\{1, t\}$ 下的矩阵表示恰好为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 与前述矩阵案例中的矩阵 $\mathbf{A}$ 相同。这清晰地展示了以下对等关系:

- **矩阵案例:** 直接对具体矩阵 $\mathbf{A}$ 进行分析, 特征向量为列向量。
- **抽象案例:** 对定义在线性空间 $P_1[t]$ 上的抽象线性变换 $\mathcal{A}$ 进行分析, 通过选取基获得其矩阵表示 $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}$, 求解后需将坐标向量“翻译”回原空间中的多项式。

3. 线性变换

常见线性变换的特征值与特征向量



例3-15: 投影变换的特征值与特征向量

已知 $\mathbb{R}^2$ 上的投影变换 P_β (把向量投影到给定方向 $\beta \neq 0$ 上)。问: $P_\beta(\alpha) = ? \alpha$, 即求 P_β 的特征值与特征向量。

3. 线性变换

常见线性变换的特征值与特征向量



解：由投影的几何意义分类讨论：

- 若 $\alpha = k\beta$ (与 β 共线), 则 $P_{\beta}(\alpha) = 1 \cdot \alpha$, 故 $\lambda_1 = 1$, 特征向量为 $k\beta$ ($k \neq 0$);
- 若 $\alpha \perp \beta$ (与 β 正交), 则 $P_{\beta}(\alpha) = 0 = 0 \cdot \alpha$, 故 $\lambda_2 = 0$, 特征向量为所有与 β 正交的非零向量。

3. 线性变换

常见线性变换的特征值与特征向量



例3-16: 求导变换的特征值与特征向量

在 $V = P_n[t]$ 上考虑求导变换 $\mathcal{D}$: $\alpha = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n \in P_n[t]$,
 $\mathcal{D}(\alpha) = a_1 + 2a_2t + \cdots + na_nt^{n-1}$. 问: $\mathcal{D}(\alpha) = ? \alpha$?

3. 线性变换

常见线性变换的特征值与特征向量



解：(1) 指定基并求矩阵表示。取 $P_n[t]$ 的标准基

$$\mathcal{B} = (1, t, t^2, \dots, t^n).$$

由于 $\mathcal{D}(1) = 0$ ，且对 $j = 1, 2, \dots, n$ 有 $\mathcal{D}(t^j) = jt^{j-1}$ ，故微商变换在基 $\mathcal{B}$ 下的矩阵为

$$A_{\mathcal{D}} = [\mathcal{D}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 线性变换

常见线性变换的特征值与特征向量



(2) 求矩阵的特征值与特征向量。矩阵 $A_{\mathcal{D}}$ 为上三角矩阵，故

$$\chi_{A_{\mathcal{D}}}(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - A_{\mathcal{D}}) = \lambda^{n+1}.$$

因此唯一的特征值为 $\lambda = 0$ 。设矩阵的特征向量为 $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)^{\top}$ ，则

$$A_{\mathcal{D}}\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

所以，矩阵 $A_{\mathcal{D}}$ 对应于特征值 0 的全体非零特征向量为

$$\mathbf{x} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0.$$

3. 线性变换

常见线性变换的特征值与特征向量



(3) 将坐标向量还原到多项式空间。这里的 α 是特征向量 $\alpha \in P_n[t]$ 在基 $\mathcal{B}$ 下的坐标, 即

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = c \cdot 1 = c, \quad c \neq 0.$$

故

$$\boxed{\lambda = 0, \quad \alpha = c \ (c \neq 0)}.$$

也就是说, $\mathcal{D}$ 的特征向量恰为所有非零常数多项式。

3. 线性变换

常见线性变换的特征值与特征向量



例3-17: 旋转变换的特征值与特征向量

问: $R_\theta(\alpha) = ? \alpha$ ($\alpha \neq 0$, R_θ 为 $\mathbb{R}^2$ 中旋转 θ 角的变换, 且 $\theta \neq k\pi$).

3. 线性变换

常见线性变换的特征值与特征向量



解：取 $V = \mathbb{R}^2$ 的一组基 e_1, e_2 ，则

$$R_\theta(e_1, e_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

计算特征多项式：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \lambda - \cos \theta \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 \cos \theta \lambda + 1, \quad \Delta = (2 \cos \theta)^2 - 4 < 0,$$

故 λ 无实数解，即旋转变换 ($\theta \neq k\pi$) 没有实的特征值与特征向量——几何上，旋转改变了每个非零向量的方向。

3. 线性变换

常见线性变换的特征值与特征向量



小结：化为矩阵的特征问题

对一般映射 $\mathcal{A}(x) \triangleq Ax$ ($x \in \mathbb{R}^n$), 问 $\mathcal{A}(x) = ? x$, 即求解矩阵特征问题

$$Ax = \lambda x$$

——求矩阵 A 的特征值与特征向量。

3. 线性变换



例3-19: 考研真题 (2005)——由相似关系求特征值

例3-19: 考研真题 (2005)——由相似关系求特征值

设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性无关的三维列向量, 且满足

$$A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad A\alpha_2 = 2\alpha_2 + \alpha_3, \quad A\alpha_3 = 2\alpha_2 + 3\alpha_3.$$

- (1) . 求矩阵 B , 使得 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) B$
- (2) . 求矩阵 A 的特征值
- (3) . 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵

3. 线性变换

例3-19 的解答



解：(1) 将各像按基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 分解，系数按列排列即得

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) 记 $P_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ (列向量线性无关, 故可逆), 则 $AP_1 = P_1B$, 即 $P_1^{-1}AP_1 = B$ ——这正是定理3-2: B 是线性变换 $x \mapsto Ax$ 在基 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 下的矩阵, 与 A 相似, 故特征值相同:

$$\det(\lambda I - B) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4) = 0 \implies \lambda = 1, 1, 4.$$

(3) 对 B 求特征向量: $\lambda = 1$ 时 $(-1, 1, 0)^T, (-2, 0, 1)^T$; $\lambda = 4$ 时 $(0, 1, 1)^T$ 。拼成 Q , 则 $Q^{-1}BQ = \text{diag}(1, 1, 4)$ 。取 $P = P_1Q$, 即得 $P^{-1}AP = \text{diag}(1, 1, 4)$ 。

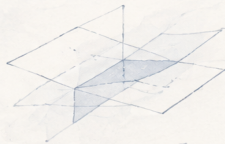
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = b$$

请总结和回顾本节学习的内容。

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 = 0, 2, \dots$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

请勤加习题练习。



$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = b$$



四教B304， 2026-09-04