

“从齐次线性方程组谈起。。。”

Jingbo Xia

2025.12.30 ——人工智能 2301/2302

1	集合、数域、映射	3
2	线性空间	12
	• 从齐次线性方程组的解向量集合说起	13
	• 线性空间（向量空间）的定义与例子	24
	• 空间的基	28
	• 基与坐标、基变换与坐标变换	38
	• 线性子空间、子空间的交与和	46
3	线性变换	51
	• 线性变换及其运算	52
	• 线性变换的矩阵表示	57
	• 特征值与特征向量	73

Outline

1	集合、数域、映射	3
2	线性空间	12
	• 从齐次线性方程组的解向量集合说起	13
	• 线性空间（向量空间）的定义与例子	24
	• 空间的基	28
	• 基与坐标、基变换与坐标变换	38
	• 线性子空间、子空间的交与和	46
3	线性变换	51
	• 线性变换及其运算	52
	• 线性变换的矩阵表示	57
	• 特征值与特征向量	73

集合、数域、映射 I

集合，集合的运算封闭

集合 (Set): 具有某种特定性质的、互不相同的对象的总体。这些对象称为集合的**元素**。

例：

- 设集合 A 是小于 5 的正整数集合。则 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 。元素 $3 \in A$ ，但 $5 \notin A$ 。
- 常见数集： $\mathbb{N}$ (自然数), $\mathbb{Z}$ (整数), $\mathbb{Q}$ (有理数), $\mathbb{R}$ (实数), $\mathbb{C}$ (复数)。

当我们说一个**集合**对于某种**运算**具有**封闭性**时，意思是：

对该集合中的任意元素进行该运算后，得到的结果仍然在这个集合之中。

集合、数域、映射 I

数域的定义与例子

数域 (Field): 一个包含 0 和 1 的非空集合 K 如果对加法、减法、乘法和除法 (除数不为 0) 都封闭, 则称 K 为一个数域。

例:

- 集合 $K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 构成一个数域。
- 两个元素相乘: $(1 + 2\sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) = 3 - \sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4 = -1 + 5\sqrt{2}$ 。其中 $-1 \in \mathbb{Q}, 5 \in \mathbb{Q}$, 所以结果仍在 K 中。

再例:

- 常见数集 $\mathbb{N}$ (自然数), $\mathbb{Z}$ (整数), $\mathbb{Q}$ (有理数), $\mathbb{R}$ (实数), $\mathbb{C}$ (复数) 是不是数域?

集合、数域、映射 I

映射的基本概念与例子

映射 (Mapping): 设 A, B 是两个非空集合。如果存在一个法则 f , 使得对于 A 中的每一个元素 x , 在 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应, 则称 f 为从 A 到 B 的一个映射, 记作 $f: A \rightarrow B$ 。

基本定义: y 是 x 的像, x 是 y 的原像. 若 $A = B$, f 称为 A 上的变换.

重要类型: 单射 (Injective)、满射 (Surjective)、双射 (Bijective)。

集合、数域、映射 II

映射的基本概念与例子

例:

- 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ 。定义映射 $f: A \rightarrow B$, 使得 $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c$ 。
- 1 的像为 a 。映射 f 的值域是 $\{a, b, c\}$ 。

集合、数域、映射 III

映射的基本概念与例子

例: ($\mathbb{R}^n$ 中的矩阵映射):

- 集合: 取 $A = B = \mathbb{R}^n$, 即 n 维实向量空间。
- 映射法则: 设 A 是一个给定的 n 阶实方阵 ($n \times n$), 定义映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为:

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

其中 $\mathbf{x}$ 是 n 维列向量, $A\mathbf{x}$ 表示矩阵与向量的乘法。

• 映射性质:

- ① 唯一性: 对于每个输入向量 $\mathbf{x}$, 其输出 $A\mathbf{x}$ 由矩阵乘法唯一确定, 满足映射定义。
- ② 线性性: 这是一个线性映射, 满足 $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$, 且 $f(k\mathbf{v}) = kf(\mathbf{v})$ 。

- 具体实例: 取 $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 。对于输入向量 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, 其像为:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

集合、数域、映射 IV

映射的基本概念与例子

例子 ($\mathbb{R}^n$ 中投影映射): 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 将一个向量投影到另一个固定向量方向上, 是最基本的线性映射之一。

- **集合定义:** 取 $A = B = \mathbb{R}^n$, 并设 $\beta \in \mathbb{R}^n$ 是一个给定的非零固定向量。
- **映射法则:** 定义映射 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为:

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n$$

其中 $(\cdot, \cdot)$ 表示向量 $\mathbb{R}^n$ 上的标准内积。

- **映射的几何意义:** 此映射 f 将任意向量 α 投影到固定向量 β 所在直线上, 得到的 $f(\alpha)$ 是 α 在 β 方向上的正交投影向量。
- **映射性质:**

集合、数域、映射 V

映射的基本概念与例子

- ① **线性性:** 由内积的双线性性可知, f 是一个线性映射。即:

$$f(k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2) = k_1 f(\alpha_1) + k_2 f(\alpha_2)$$

- ② **幂等性:** 这是一个关键特征。投影后再投影, 结果不变:

$$f(f(\alpha)) = f(\alpha)$$

因此 $f \circ f = f$, 满足幂等性。

集合、数域、映射 VI

映射的基本概念与例子

- 具体实例：在 $\mathbb{R}^2$ 中，取固定向量 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ，考虑向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 。计算其投影：

$$(\alpha, \beta) = 3 \times 2 + 4 \times 0 = 6$$

$$(\beta, \beta) = 2 \times 2 + 0 \times 0 = 4$$

$$f(\alpha) = \frac{6}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

投影结果 $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 正是 α 在 x 轴 (β 方向) 上的正交投影。

小结：正交投影映射 f 是满足幂等性的线性映射，它反映了将高维向量“压缩”到低维子空间（此处为一维直线）的基本操作，是几何与代数结合的典范。

Outline

1	集合、数域、映射	3
2	线性空间	12
	• 从齐次线性方程组的解向量集合说起	13
	• 线性空间（向量空间）的定义与例子	24
	• 空间的基	28
	• 基与坐标、基变换与坐标变换	38
	• 线性子空间、子空间的交与和	46
3	线性变换	51
	• 线性变换及其运算	52
	• 线性变换的矩阵表示	57
	• 特征值与特征向量	73

线性空间 II

从齐次线性方程组的解向量集合说起

方程组的详尽展开形式

将矩阵方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 展开为传统的线性方程组形式：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

或者更紧凑地，对于每个 $i = 1, 2, \dots, m$ ，有：

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

线性空间 III

从齐次线性方程组的解向量集合说起

解向量的集合满足加法和数乘的运算封闭性

记该齐次线性方程组的解集为：

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

可以验证， S 对向量加法和数乘运算封闭，且包含零向量。

1. 加法封闭性

设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ ，即 $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 且 $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 。

考虑 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ：

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

因此 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$ ，加法封闭性得证。

线性空间 X

从齐次线性方程组的解向量集合说起

1. 令 $(x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0)$, 得 $\xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2. 令 $(x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0)$, 得 $\xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 3. 令 $(x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1)$, 得 $\xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

验证与结论 向量组 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关 (其后三个分量构成单位矩阵), 且方程组的任意解 $\mathbf{x}$ 均可表示为它们的线性组合:

$$\mathbf{x} = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + k_3 \xi_3 = \begin{pmatrix} -k_1 - k_2 - k_3 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$$

线性空间 XI

从齐次线性方程组的解向量集合说起

因此, $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ 构成该一组基础解系。

1

集合、数域、映射

3

2

线性空间

12

从齐次线性方程组的解向量集合说起

13

线性空间（向量空间）的定义与例子

24

空间的基

28

基与坐标、基变换与坐标变换

38

线性子空间、子空间的交与和

46

3

线性变换

51

线性空间及其性质 I

线性空间（向量空间）的定义与例子

线性空间 (Vector Space): 设 V 是一个非空集合, K 是一个数域。在 V 上定义了**向量加法** ($+: V \times V \rightarrow V$) 和**标量数乘** ($\cdot: K \times V \rightarrow V$) 两种运算, 且运算在 V 上封闭。若以下八条公理对所有 $u, v, w \in V$ 及所有 $k, l \in K$ 成立, 则称 V 是数域 K 上的线性空间。

线性空间八条公理

加法公理

- 1

加法交换律: $u + v = v + u$
- 2

加法结合律: $(u + v) + w = u + (v + w)$
- 3

零元存在: 存在 $0 \in V$, 使得 $u + 0 = u$
- 4

负元存在: 对每个 $u \in V$, 存在 $-u \in V$, 使得 $u + (-u) = 0$

线性空间（向量空间）的定义与例子

- **多项式空间**：系数在数域 K 上的全体多项式集合 $P[x]$ 是数域 K 上的线性空间。
- 比如，若 $f(x) = x^2 + 1, g(x) = 2x - 3 \in P[x]$ ，则 $f(x) + g(x) = x^2 + 2x - 2 \in P[x]$ 。
- **非线性空间的例子**：数域 K 上次数等于 n 的多项式集合不构成线性空间。
- 例如，当 $n = 2$ 时， $(x^2 + x) + (-x^2 + 1) = x + 1$ ，其次数为 1 (不等于 2)。

28 / 85

线性空间 I

空间的基—线性相关与线性无关

线性相关与线性无关

- **线性相关 (Linearly Dependent)**: 存在不全为零的系数 $k_i \in K$, 使得 $\sum_{i=1}^n k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, 此时称 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 线性相关。
- **线性无关 (Linearly Independent)**: 只有当所有系数 $k_i = 0$ 时, 才有 $\sum_{i=1}^n k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, 此时称 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 线性无关。

线性空间 II

空间的基—线性相关与线性无关

线性相关与线性无关

- **线性相关 (Linearly Dependent)**: 存在不全为零的系数 $k_i \in K$, 使得 $\sum_{i=1}^n k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, 此时称 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 线性相关。
- **线性无关 (Linearly Independent)**: 只有当所有系数 $k_i = 0$ 时, 才有 $\sum_{i=1}^n k_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, 此时称 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 线性无关。

例 1: 数组空间中的向量在 $\mathbb{R}^3$ 中, 考察向量组:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

问: 该向量组是否线性相关?

线性空间 I

空间的基—基的定义

基 (Basis): 线性空间 V 的一个向量组 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ 如果满足:

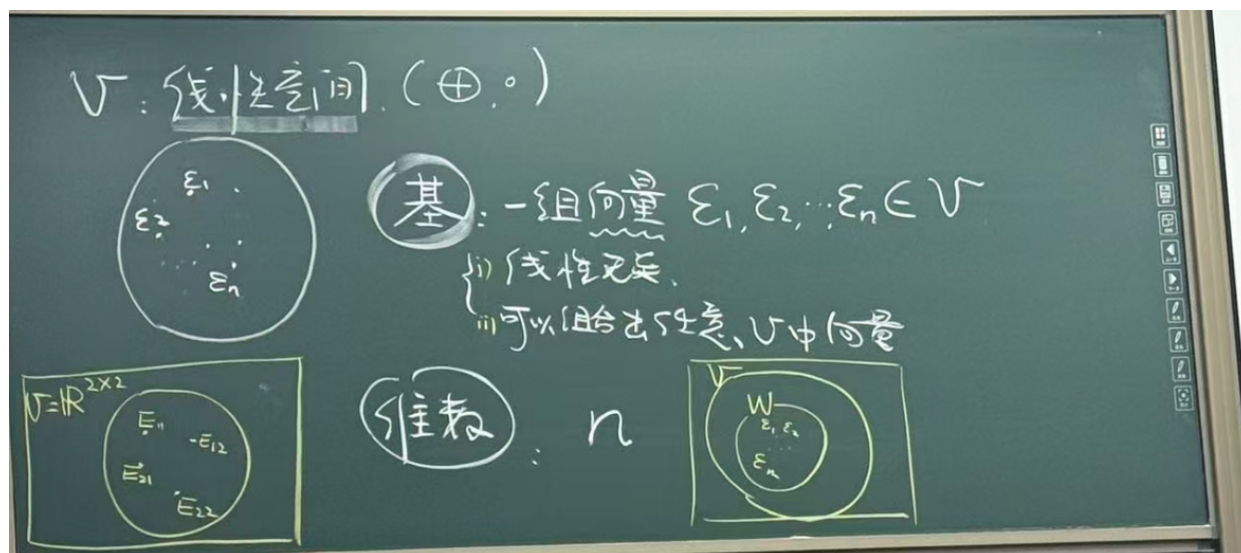
1) 线性无关;

2) V 中任何向量都可由 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ 线性表示。

则称, 这个向量组是 V 中的一组基。称 V 的维数 (Dimension) 为 n , 记作 $\dim(V) = n$. 换言之, $\dim(V)$ 就是任意基中向量的个数。

线性空间 II

空间的基—基的定义



线性空间 III

空间的基——基的定义

例：在 $\mathbb{R}^3$ 中，向量组 $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ 是一个基。

- 分析：它们是线性无关的，且任何向量 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ 都可以表示为 $x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ 。
- 结论： $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ 。

线性空间 IV

空间的基——基的定义

再例：

- 解向量空间 $S = \{x | Ax = 0\}$ 中的基础解系是一组基。
- 结论： $\dim(S) = n - r$ ，其中 n 是未知数个数， r 是 A 的秩。

线性空间 IV

基与坐标、基变换与坐标变换

例: 在 R^3 中, $\alpha = (3, 2, 1)$, 求在基 $\alpha_1 = (1, 1, 1), \alpha_2 = (1, 1, 0), \alpha_3 = (1, 0, 0)$ 下的坐标.

设 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 (x_1, x_2, x_3)

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \text{ 故坐标为 } (1, 1, 1)$$

Navigation icons

Jingbo Xia

线性空间与线性变换

2025.12.30 — 人工智能 2301/2302

41 / 85

线性空间 V

基与坐标、基变换与坐标变换

同一向量在不同基下的坐标不同

同一个多项式 $p(t) = 3 + 2t - t^2$:

- 在基 $\{1, t, t^2\}$ 下的坐标是 $(3, 2, -1)$ 。
- 考虑另一组基 $\{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ 。为求 $p(t)$ 在这组基下的坐标 (x_1, x_2, x_3) , 需解方程:

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot (1+t) + x_3 \cdot (1+t+t^2) = 3 + 2t - t^2$$

整理得: $(x_1 + x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)t + x_3t^2 = 3 + 2t - t^2$, 解得 $x_3 = -1, x_2 = 3, x_1 = 1$ 。
故在基 $\{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ 下, $p(t)$ 的坐标为 $(1, 3, -1)$ 。

Navigation icons

Jingbo Xia

线性空间与线性变换

2025.12.30 — 人工智能 2301/2302

42 / 85

线性空间 VI

基与坐标、基变换与坐标变换

基与基的过渡矩阵

设 $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ 是线性空间 V 的另一组基。从基 $\{\varepsilon_i\}$ 到基 $\{\eta_i\}$ 的过渡矩阵 P 是一个 $n \times n$ 的可逆矩阵，其定义由下列关系给出：

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) P.$$

具体而言，将每个新基向量 η_j 在旧基 $\{\varepsilon_i\}$ 下展开：

$$\eta_j = p_{1j}\varepsilon_1 + p_{2j}\varepsilon_2 + \cdots + p_{nj}\varepsilon_n, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

则系数 p_{ij} 构成了过渡矩阵 P 的第 j 列：

$$P = (p_{ij})_{n \times n} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

线性空间 VII

基与坐标、基变换与坐标变换

定理：向量坐标变换公式

设向量 $\alpha \in V$ 在基 $\{\varepsilon_i\}$ 下的坐标为 α_ε ，在基 $\{\eta_i\}$ 下的坐标为 α_η ，即：

$$\alpha = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \alpha_\varepsilon = (\eta_1, \dots, \eta_n) \alpha_\eta.$$

若从基 $\{\varepsilon_i\}$ 到基 $\{\eta_i\}$ 的过渡矩阵为 P ，则这两个坐标之间满足如下关系：

$$\alpha_\varepsilon = P \alpha_\eta$$

或等价地

$$\alpha_\eta = P^{-1} \alpha_\varepsilon.$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

线性空间 VIII

基与坐标、基变换与坐标变换

证明: 由基变换关系 $(\eta_1, \dots, \eta_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) P$, 代入 α 在新基下的表示:

$$\begin{aligned}\alpha &= (\eta_1, \dots, \eta_n) \alpha_\eta \\ &= [(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) P] \alpha_\eta \\ &= (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) (P \alpha_\eta).\end{aligned}$$

另一方面, α 在旧基下的表示为 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \alpha_\varepsilon$. 由于向量在同一组基下的坐标是唯一的, 比较上式可得:

$$\alpha_\varepsilon = P \alpha_\eta.$$

由于过渡矩阵 P 是可逆矩阵, 在上式两边同时左乘 P^{-1} , 即得到逆变换公式:

$$\alpha_\eta = P^{-1} \alpha_\varepsilon.$$

□

1	集合、数域、映射	3
2	线性空间	12
	• 从齐次线性方程组的解向量集合说起	13
	• 线性空间 (向量空间) 的定义与例子	24
	• 空间的基	28
	• 基与坐标、基变换与坐标变换	38
	• 线性子空间、子空间的交与和	46
3	线性变换	51

线性空间 I

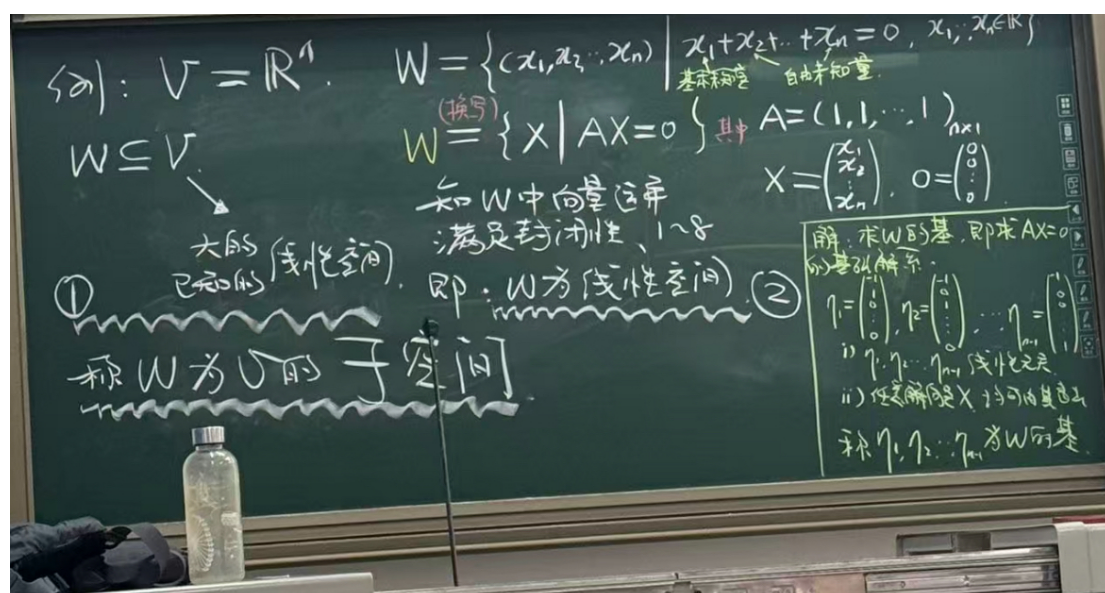
线性子空间、子空间的交与和

线性子空间 (Linear Subspace): 设 V 是线性空间, W 是 V 的非空子集。如果 W 对 V 中的加法和数乘运算也构成线性空间, 则称 W 是 V 的一个线性子空间。

Navigation icons: back, forward, search, etc.

线性空间 II

线性子空间、子空间的交与和



Navigation icons: back, forward, search, etc.

线性空间 III

线性子空间、子空间的交与和

例 求 K^n 的子空间 $W_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K \text{ 且 } x_1 + \dots + x_n = 0\}$
的基本维数, $W_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 0, x_1, \dots, x_n \in R\}$
 $V = IR^n, W_2 \subseteq V$. $\overline{A} \times \{AX=0\}$ 其中 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\downarrow$ 大的已知的 $A = (1, \dots, 1)_{n \times 1}$
① 线性空间
② 知 W_2 中向量运算满足封闭性, 1~8条公理, 即 W_2 为线性空间
解: 求 W_2 的基,
即令 $AX=0$, 求其通解
 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \eta_{n-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 维数 $n-1$
一组基

线性空间与线性变换

Jingbo Xia

线性空间与线性变换

2025.12.30 —— 人工智能 2301/2302

48 / 85

线性空间 IV

线性子空间、子空间的交与和

分析: 此题中, $V = R^{2 \times 2}$ (所有2阶方阵的集合)
 $W = L(A_1, A_2, A_3, A_4)$ 是 V 的子空间.
将 $A_1, A_2, \dots, A_4$ 由这组基线性表示, 获其坐标.
 $\eta_1 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 即 A 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下坐标为 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
类似可求得 A_2, A_3, A_4 的坐标分别为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

例 在 K^3 中, 求由
 $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$
 $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$
生成的子空间的基与维数.

线性空间与线性变换

Jingbo Xia

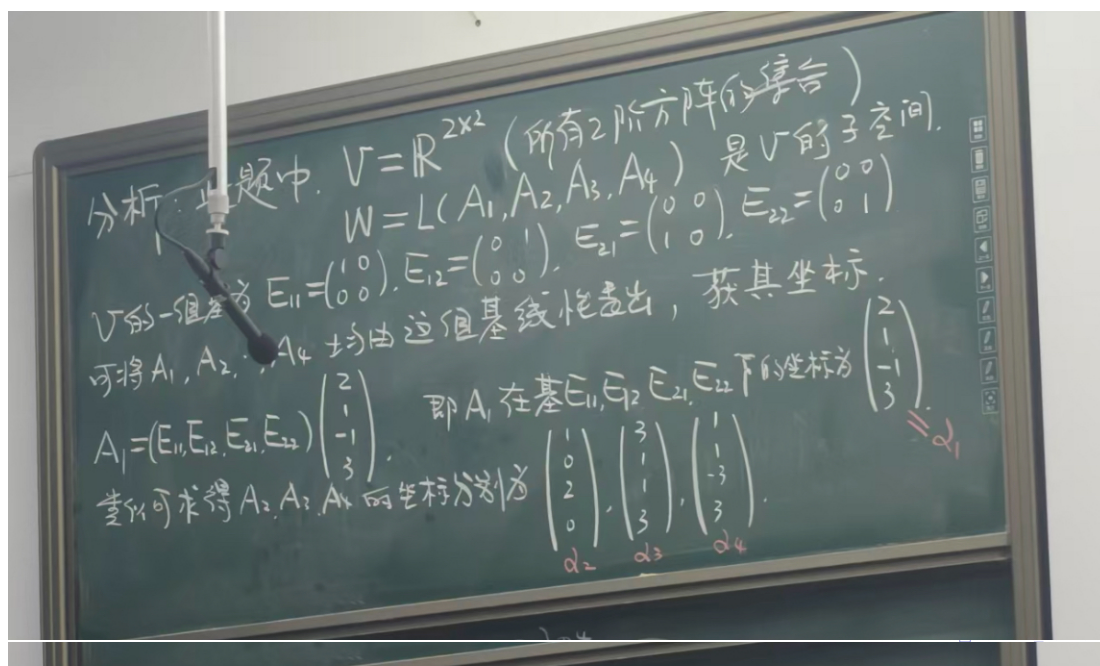
线性空间与线性变换

2025.12.30 —— 人工智能 2301/2302

49 / 85

线性空间 V

线性子空间、子空间的交与和



Outline

1 集合、数域、映射	3
2 线性空间	12
• 从齐次线性方程组的解向量集合说起	13
• 线性空间 (向量空间) 的定义与例子	24
• 空间的基	28
• 基与坐标、基变换与坐标变换	38
• 线性子空间、子空间的交与和	46
3 线性变换	51
• 线性变换及其运算	52
• 线性变换的矩阵表示	57
• 特征值与特征向量	73

1	集合、数域、映射	3
2	线性空间	12
3	线性变换	51
	• 线性变换及其运算	52
	• 线性变换的矩阵表示	57
	• 特征值与特征向量	73

线性变换 I

线性变换的定义

线性变换 (Linear Transformation): 设 $T: V \rightarrow V$ 是从线性空间 V 到 V 的映射。如果满足:

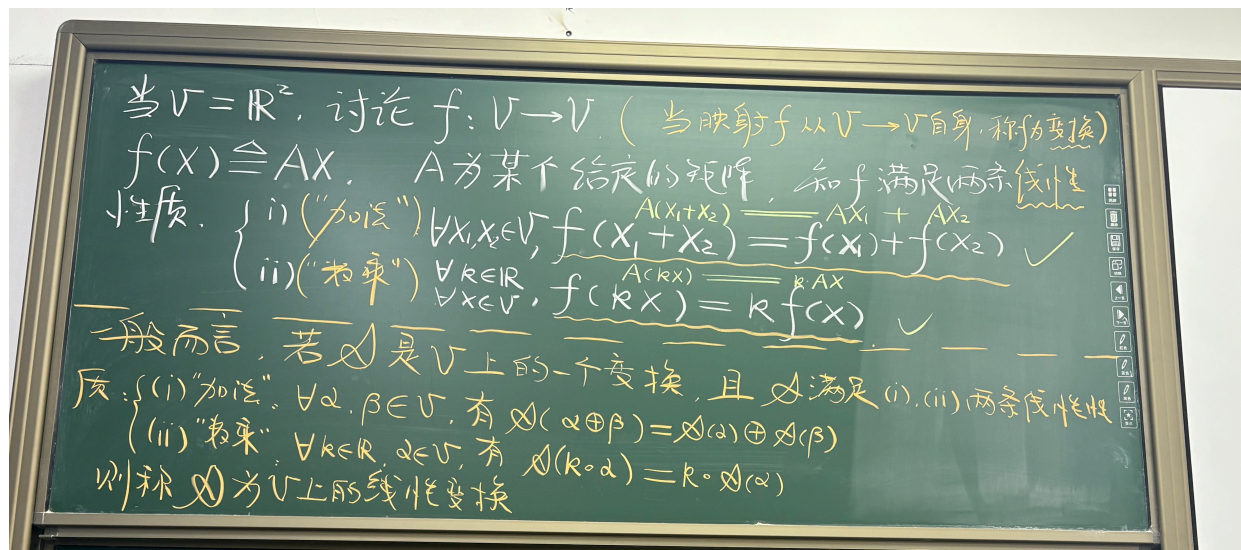
1) 可加性: $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$;

2) 齐次性: $T(\alpha \mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$,

则称 T 为线性变换。

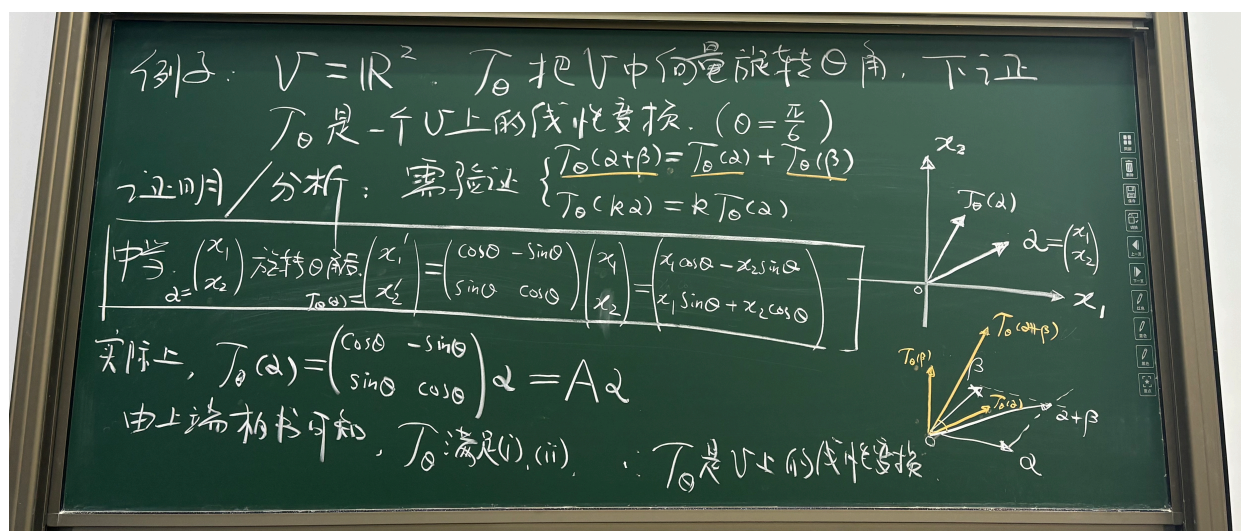
线性变换 II

线性变换的定义



线性变换 III

线性变换的定义



线性变换 IV

线性变换的定义

例：

设 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, 定义为 $T(x, y) = (x + y, x - y)$ 。

- 分析：通过验证可加性和齐次性，可知 T 是一个线性变换。

线性变换 V

线性变换的定义

核与像

核 (Kernel): $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{v} \in V \mid T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}。$

像 (Image): $\text{Im}(T) = \{T(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\}$ 。

1	集合、数域、映射	3
2	线性空间	12
3	线性变换	51
	• 线性变换及其运算	52
	• 线性变换的矩阵表示	57
	• 特征值与特征向量	73

线性变换 I

线性变换的矩阵表示

定理

设 $T: V \rightarrow W$ 是线性变换。选择 V 的基 $B = \{e_j\}$ 和 W 的基 $B' = \{f_i\}$ 。若 $T(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i$ ，则矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为 T 在基 B, B' 下的矩阵表示，记作 $A = [T]_{B'}^B$ 。

线性变换 II

线性变换的矩阵表示

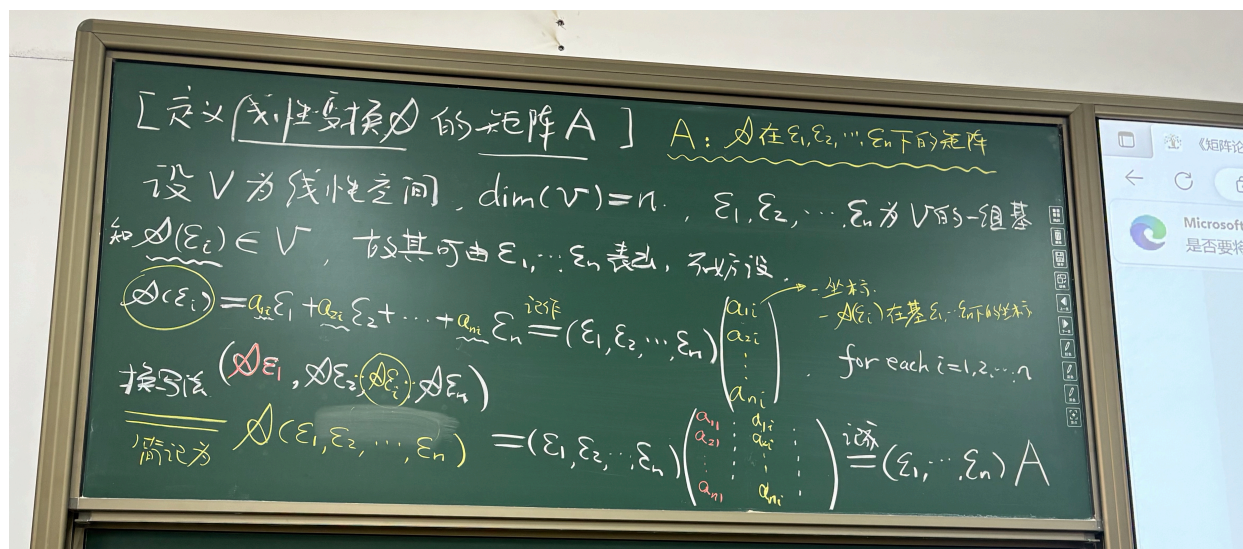
例：设 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$ 。在标准基 $\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ 下求 T 的矩阵。

• 分析： $T(1, 0) = (1, 1)$, $T(0, 1) = (1, -1)$ 。

• 结论：矩阵表示为 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 。

线性变换 III

线性变换的矩阵表示



线性变换 IV

线性变换的矩阵表示

线性变换的矩阵表示.

定义线性变换 ϕ 的矩阵 A $\Rightarrow$ A 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵

设 V 为线性空间, $\dim(V)=n$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 为 V 的一组基

知 $\phi(\varepsilon_i) \in V$, 故其可有 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 线性表出.

不妨设:

$$\phi(\varepsilon_i) = a_{1i}\varepsilon_1 + a_{2i}\varepsilon_2 + \dots + a_{ni}\varepsilon_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

($i=1, 2, \dots, n$)

换写法:

$$(\phi\varepsilon_1, \phi\varepsilon_2, \dots, \phi\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

记作 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)A$

简化为 $\phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)A$

线性变换 V

线性变换的矩阵表示

性质: 如果 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 确定了, A 亦确定了, 则 ϕ 确定了.

分析: $\forall \alpha \in V$, $\phi(\alpha) = ?$

$\exists \alpha = b_1\varepsilon_1 + b_2\varepsilon_2 + \dots + b_n\varepsilon_n = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

则 $\phi(\alpha) = \phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

总结: $\forall \alpha$, 若其在 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下坐标为 $\vec{b}$, 则 $\phi\alpha$ 在 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下坐标为 $A\vec{b}$

换言之, 当 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 与 A 是确定的, 则 ϕ 也就确定了.

线性变换 VI

线性变换的矩阵表示

性质: 若 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 已确定, A 已确定, 则 $\mathcal{A}$ 已确定.

分析: $\forall \alpha \in V, \mathcal{A}(\alpha) = ?$

$\Rightarrow$ 设 $\alpha = b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + \dots + b_n \xi_n = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

则 $\mathcal{A}(\alpha) = \mathcal{A}(\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$\downarrow$

总结: $\forall \alpha$ 若其在 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 下坐标为 $\vec{b}$, 则 $\mathcal{A}\alpha$ 在 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 下坐标为 $A\vec{b}$,
换言之, 当 $\xi_1, \dots, \xi_n$ 和 A 是确定的, 则给出了 $\mathcal{A}$ 的定义.

线性变换 I

基变换对矩阵表示的影响

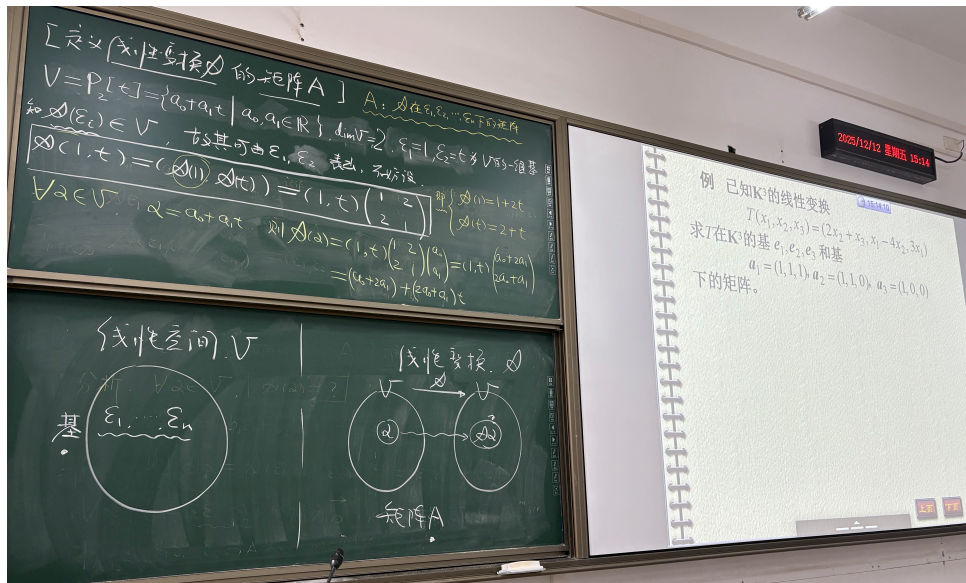
定理

设 $T: V \rightarrow V$ 是线性变换。若 A 是 T 在基 B 下的矩阵, A' 是 T 在基 B' 下的矩阵, 且 P 是从 B 到 B' 的过渡矩阵。则 $A' = P^{-1}AP$ 。

- 这意味着 A 和 A' 是相似矩阵 (Similar Matrices)。

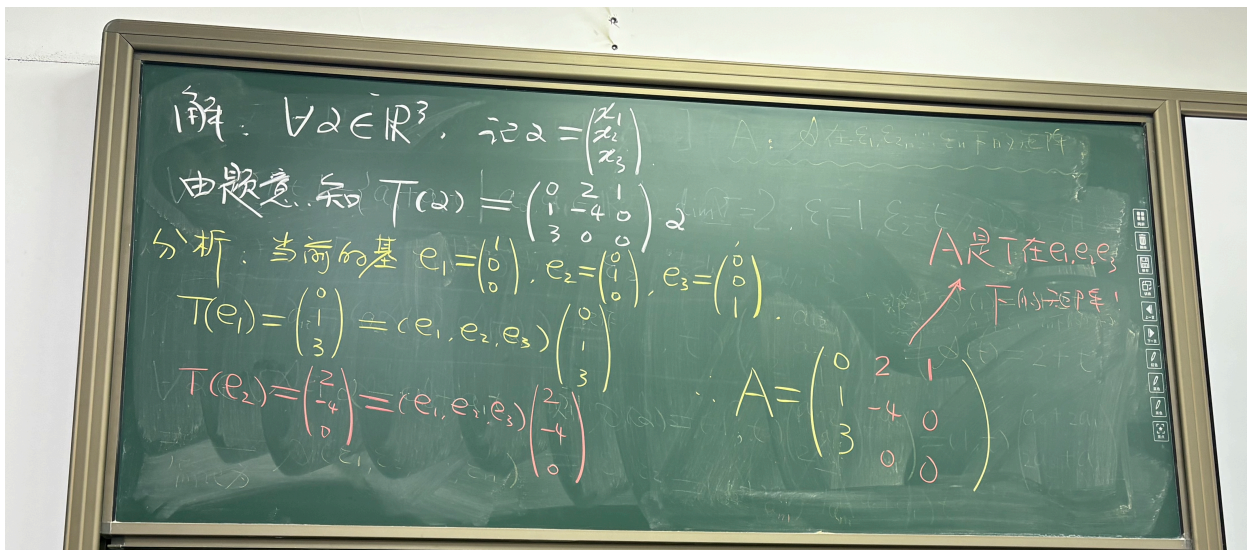
线性变换 II

基变换对矩阵表示的影响



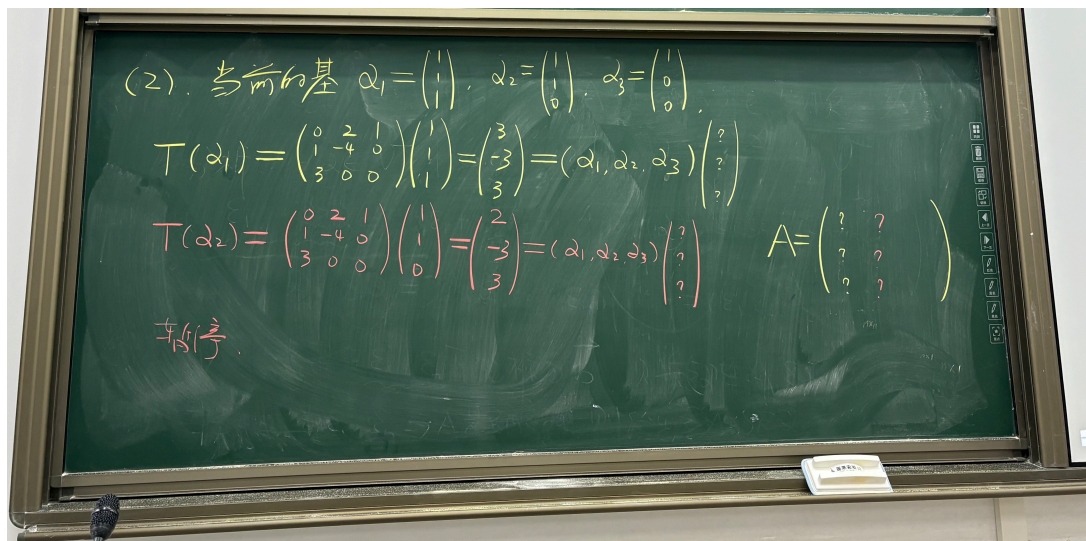
线性变换 III

基变换对矩阵表示的影响



线性变换 IV

基变换对矩阵表示的影响



Navigation icons

Jingbo Xia

线性空间与线性变换

2025.12.30 — 人工智能 2301/2302

66 / 85

线性变换 V

基变换对矩阵表示的影响

例

已知线性变换 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 定义为:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_2 + x_3, x_1 - 4x_2, 3x_1)$$

- (1) . 求 f 在自然基 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ 下的矩阵 A
- (2) . 求 f 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵 B

解 (1): 取自然基 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$. 将基向量分别代入变换, 得到其像在同一组基下的坐标:

$$f(\mathbf{e}_1) = f(1, 0, 0) = (0, 1, 3) = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$$

$$f(\mathbf{e}_2) = f(0, 1, 0) = (2, -4, 0) = 2\mathbf{e}_1 + (-4)\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$

$$f(\mathbf{e}_3) = f(0, 0, 1) = (1, 0, 0) = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 0\mathbf{e}_3$$

Navigation icons

Jingbo Xia

线性空间与线性变换

2025.12.30 — 人工智能 2301/2302

67 / 85

线性变换 X

基变换对矩阵表示的影响

所以，线性变换 f 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

1	集合、数域、映射	3
2	线性空间	12
3	线性变换	51
	• 线性变换及其运算	52
	• 线性变换的矩阵表示	57
	• 特征值与特征向量	73

线性变换 I

特征值与特征向量

特征值 (Eigenvalue) 与特征向量 (Eigenvector)。

矩阵情形：

若存在非零列向量 $\mathbf{v}$ 和标量 λ ，使得矩阵方程 $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ 成立，则称 λ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值， $\mathbf{v}$ 为对应的特征向量。

线性变换情形：

设 $T: V \rightarrow V$ 是数域 K 上线性空间 V 中的线性变换。如果存在非零向量 $\mathbf{v} \in V$ 和标量 $\lambda \in K$ ，使得

$$T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$$

成立，则称 λ 为线性变换 T 的一个特征值， $\mathbf{v}$ 为 T 对应于特征值 λ 的特征向量。

线性变换 II

特征值与特征向量

例：求矩阵的特征值与特征向量

设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ，求其特征值 λ 与对应的特征向量 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ 满足方程 $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ 。

解：由特征方程 $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ 求解特征值：

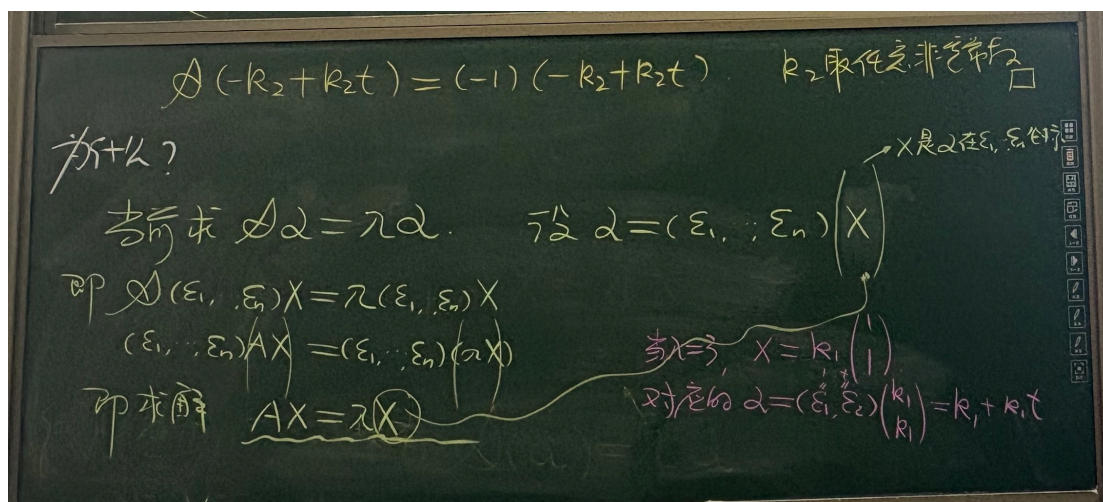
$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

解此二次方程得特征值： $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ 。

其次，对每个特征值求解特征向量：

线性变换 V

特征值与特征向量



线性变换 VI

特征值与特征向量

例：求线性变换的特征值与特征向量（抽象案例）

设线性空间 $V = P_1[t]$ 为次数不超过 1 的多项式构成的线性空间。定义线性变换 $T: V \rightarrow V$ 在空间基 $\{1, t\}$ 上的作用为：

$$T(1) = 1 + 2t, \quad T(t) = 2 + t.$$

求该线性变换 T 的特征值 λ 与对应的特征向量（即非零多项式 $p(t) \in V$ ），满足方程 $T(p(t)) = \lambda p(t)$ 。

解：首先，将线性变换 T 在给定的基 $\{1, t\}$ 下表示为矩阵。基向量 1 和 t 在该基下的坐标分别为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。计算它们在 T 下的像的坐标：

$$T(1) = 1 + 2t \Rightarrow \text{坐标: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

特征值与特征向量

因此，线性变换 T 在基 $\{1, t\}$ 下的矩阵表示为：

接下来，问题转化为求矩阵 $\mathbf{A}_T$ 的特征值与特征向量，解法与前述矩阵案例完全相同。由特征方程 $\det(\mathbf{A}_T - \lambda \mathbf{I}) = 0$ 求解特征值：

解此二次方程得特征值: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$ 。
其次, 对每个特征值求解特征向量:

特征值与特征向量

$$p_1(t) = k_1 \cdot (1 \cdot 1 + 1 \cdot t) = k_1(1 + t), \quad k_1 \neq 0.$$

线性变换 IX

特征值与特征向量

- ② 对于 $\lambda_2 = -1$: 解齐次线性方程组 $(\mathbf{A}_T + \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

该方程组等价于 $v_1 = -v_2$, 故基础解系对应的坐标向量为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。将此坐标向量还原为 V 中的多项式, 得到对应 $\lambda_2 = -1$ 的特征向量 (多项式) 为:

$$p_2(t) = k_2 \cdot (-1 \cdot 1 + 1 \cdot t) = k_2(-1 + t), \quad k_2 \neq 0.$$

线性变换 X

特征值与特征向量

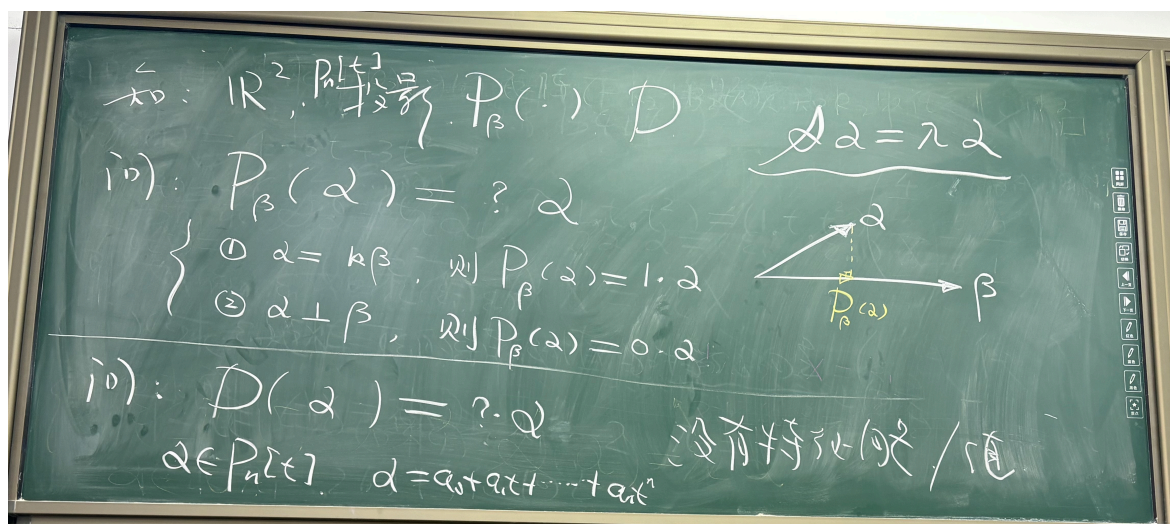
因此, 线性变换 T 的特征值为 $\lambda_1 = 3$ 和 $\lambda_2 = -1$, 对应的全部特征向量 (多项式) 分别为 $k_1(1 + t)$ 和 $k_2(-1 + t)$, 其中 k_1, k_2 为非零任意常数。

总结: 此例中, 线性变换 T 在基 $\{1, t\}$ 下的矩阵表示恰好为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 与前述矩阵案例中的矩阵 $\mathbf{A}$ 相同。这清晰地展示了以下对等关系:

- **矩阵案例:** 直接对具体矩阵 $\mathbf{A}$ 进行分析, 特征向量为列向量。
- **抽象案例:** 对定义在线性空间 $P_1[t]$ 上的抽象线性变换 T 进行分析, 通过选取基获得其矩阵表示 $\mathbf{A}_T$, 求解后需将坐标向量“翻译”回原空间中的多项式。

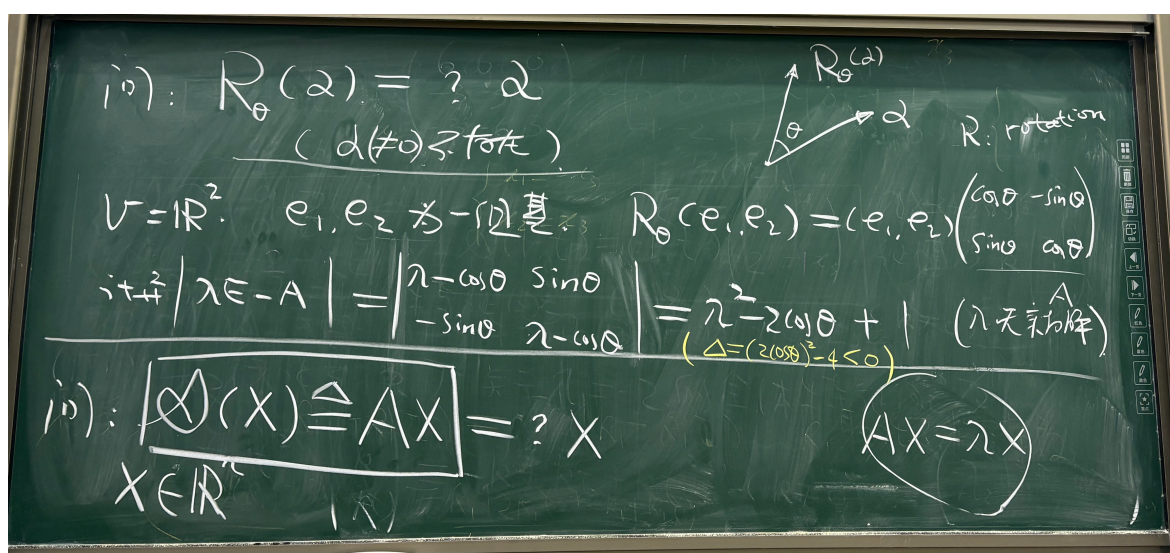
特征值与特征向量 I

常见线性变换的特征值与特征向量



特征值与特征向量 II

常见线性变换的特征值与特征向量



请好好复习！