线性空间 V （vector）

（向量空间）

- 集合 S（set）

注：线性空间是一个包含两个运算的集合（$\oplus$ ·）

定义

设V是一个非空集合，R为实数域，如果对于任意两个元素 α $\beta \in V$，总有唯一的元素 $\gamma \in V$ 与之对应，称为 α 和 β 的和，记作

$$\gamma = \alpha \oplus \beta \quad \rightarrow \text{“定义}\oplus\text{”}$$

计算的结果为唯一值，不会出现一个算式多个答案。

若对于任一数 $\lambda \in R$ 与任一元素 $\alpha \in V$，总有唯一的一个元素 $\delta \in V$ 与之对应，称为 λ 与 α 的数乘，记作

$$\delta = \lambda \circ \alpha.$$

例：

$V_1 = R^{2\times2}$

$\forall x, y \in V_1$

$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$

$x \oplus y \triangleq \begin{pmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} \\ x_{21}+y_{21} & x_{22}+y_{22} \end{pmatrix}$

$V_2 = R[x]_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_1, a_2, a_3 \in R\}$

$\forall f(x), g(x) \in V_2$

$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$

$g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$

$f(x) \oplus g(x) \triangleq (b_0+c_0) + (b_1+c_1)x + (b_2+c_2)x^2$

V_1 $\quad \forall a \in R$

$\forall X \in V_1$

$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$

$a \circ X \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

或 $a \circ X \triangleq \begin{pmatrix} ax_{11} \\ a \end{pmatrix}$

V_2 $\quad \forall a \in R \quad \forall f(x) \in V_2$

不妨设 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$

$a \cdot f(x) \triangleq b$（某一个定值）

或 $a \cdot f(x) \triangleq aa_0 + aa_1x + aa_2x^2$

设 $\alpha,\beta,\gamma\in V$；$\lambda,\mu\in R$.　只有满足以下八条，$(V,\oplus,\circ)$ 是一个线性空间

(1). $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2). $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3). 在V中存在零元素0，对任何 $\alpha\in V$，都有

$$\alpha+0=\alpha$$

→不一定是数字0

逻辑推理：$\Delta+\square=\Delta$

$\therefore\ \square=0$

(4). 对任何 $\alpha\in V$，都有α的负元素 $\beta\in V$，使

$$\alpha+\beta=0$$

线性空间里没有减法！

逻辑推理：$\alpha+\square=0$

则 $\square=-\alpha$.

(5). $1\alpha=\alpha$

(6). $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$.

(7). $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$.

(8). $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$.

例1：$V_1=R^{2\times2}$，$\oplus$为普通加法，$\circ$为普通数乘.

例2：$V_1=R^{2\times2}$，$\oplus$为普通加法，$\circ$为 $a\circ X=0$

结论：例1中 V_1 关于 $\oplus$. $\circ$ 构成线性空间.

$(V_1,\oplus,\circ)$ 是一个线性空间.

例2 $(V_2,\oplus,\circ)$ 不是一个线性空间.

说明：

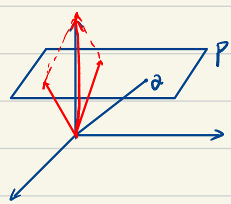
1. 凡满足以上八条规律的加法及数乘运算，称为线性运算

2. 向量空间中的向量不一定是有序数组. 如 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$

3. 判断线性空间的方法：① 加法和数乘运算不封闭　封闭：$\alpha+\beta=\gamma$, $a\cdot\alpha=\xi$, $\gamma,\xi\in V$

② 运算不满足八条中任意一条.

例3：



$V_3=\{P\}$.

$\oplus$, $\circ$ 是普通的向量加法，数乘.

不是线性空间

① 不满足封闭性　② P中不存在0元素（3错）　③ 4错.

↳两向量相加不在P内

例4：$V_4=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\middle|\ x,y\in R\right\}$. 是一个线性空间

例5 $V_5=R^+$ $\forall a,b\in V_5$，$k\in R$，$a\oplus b=ab$ $k\circ a=a^k$

$a\oplus b=ab\in V_5$ ∴ $\oplus$ 封闭.

$k\circ a=a^k\in V_5$，∴ $\circ$ 封闭.

∵ $a\oplus b=ab$，$b\oplus a=ba$ ∴ $a\oplus b=b\oplus a$. ∴ (1) √

∵ $(a\oplus b)\oplus c=ab\oplus c=abc$. $a+(b+c)=a+bc=abc$ ∴ (2) √.

∵ $a+x=a\cdot x=a$. ∴ $x=1$ ∴ 存在零元素 1 ∴ (3) √

∵ 存在零元，∴ $a+y=1$，即 $ay=1$ ∴ $y=\frac{1}{a}\in V_5$. ∴ (4) √

∵ $1\cdot a=a^1=a$ ∴ (5) √

∵ $(\lambda+\mu)a=a^{\lambda+\mu}=a^\lambda\cdot a^\mu=a^\lambda+a^\mu=\lambda a+\mu a$ ∴ (7) √

∵ $\lambda(a+b)=\lambda ab=(ab)^\lambda=a^\lambda b^\lambda=a^\lambda+b^\lambda=\lambda a+\lambda b$.

例6. $V_7=\{♡\}$. $♡+♡=♡$. $\forall k\in R$ $k♡=♡$.

∵ $♡+♡=♡$，∴ (1) √

∵ $(♡+♡)+♡=♡+♡=♡$ $♡+(♡+♡)=♡+♡=♡$ ∴ (2) √

∵ 令 $♡+x=♡$ ∴ $x=♡$ ∴ 存在零元 ∴ (3) √

∵ 令 $♡+y=♡$ ∴ $y=♡$ ∴ (4) √

∵ $1\cdot♡=♡$ ∴ (5) √

∵ $\lambda(\mu♡)=\lambda♡=♡$ $(\lambda\mu)♡=♡$ ∴ (6) √

∵ $(\lambda+\mu)♡=♡$ $\lambda♡+\mu♡=♡+♡=♡$ ∴ (7) √

∵ $\lambda(♡+♡)=\lambda♡=♡$ $\lambda♡+\lambda♡=♡+♡=♡$ ∴ (8) √

线性空间的性质

(1). 零元素唯一

证：设有两个零元 0_1，0_2.

$\therefore 0_1 \oplus \boxed{0_2} = 0_1$

$\therefore \boxed{0_1} \oplus 0_2 = 0_2$.

$\therefore 0_1 = 0_2$

$\therefore$ 零向量唯一

(2). 负元素唯一

证：设 β, γ 均为 α 的负元素.

则 $\alpha \oplus \beta = 0$， $\alpha \oplus \gamma = 0$

$\gamma \oplus \alpha \oplus \beta = \gamma$

$\therefore (\gamma \oplus \alpha) \oplus \beta = \gamma$

$\therefore 0 \oplus \beta = \gamma$

即 $\beta = \gamma$

$\therefore$ 负元素唯一.

(3). $0 \cdot \alpha = 0$；$(-1)\alpha = -\alpha$；$\lambda \cdot 0 = 0$.

证：$\alpha + 0 \cdot \alpha = (1+0) \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha$

$\therefore 0 \cdot \alpha = 0$

$(-1)\alpha + \alpha = (-1)\alpha + 1 \cdot \alpha = (-1+1)\alpha = 0 \cdot \alpha = 0$.

$\therefore (-1)\alpha = -\alpha$.

$\lambda \cdot 0 + \lambda\alpha = \lambda(0+\alpha) = \lambda\alpha$.

$\therefore \lambda \cdot 0 = 0$

(4). 如果 $\lambda\alpha = 0$， 则 $\lambda = 0$ 或 $\alpha = 0$

线性空间的子空间

定义　设V是一个线性空间，L是V的一个非空子集，如果L对于V中所定义的加法和数乘两种运算也构成一个线性空间，则称L为V的子空间。

定理　线性空间V的非空子集L构成子空间的充分必要条件是：L对于V中的线性运算封闭。

只要证数乘和⊕的封闭性。

(3). $\forall \alpha \in L$　$\therefore 0\cdot\alpha = \theta \in L$

(4). $\forall \alpha \in L$　$\therefore -\alpha = (-1)\cdot\alpha \in L$.

例：　作业题。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & -b_{11} \end{pmatrix}.$$

$$C = A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & -(a_{11}+b_{11}) \end{pmatrix}$$

$\therefore C_{11} + C_{22} = 0$　且　$C_{11}\ C_{12}\ C_{21}\ C_{22} \in R$.

$\therefore A+B = C \in L$.

例) $R^{2\times 3}$ 的下列子集是否构成子空间？为什么？

(1). $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \middle| \; b, c, d \in R \right\}$.

(2). $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \middle| \; a+b+c=0, \; a, b, c \in R \right\}$.

解：(1). 设 $\forall A, B \in W_1$.

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & b_1+b_2 & 0 \\ 0 & c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix} \notin W_1$$

∴ 不构成.

(2). ......

$$A+B = \begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1+c_2 \end{pmatrix}$$

∵ $a_1+b_1+c_1=0$

$a_2+b_2+c_2=0$.

∴ $a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2=0$

即 $A+B \in W_2$.

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 & 0 \\ 0 & 0 & kc_1 \end{pmatrix}$$

∵ $ka_1+kb_1+kc_1 = k(a_1+b_1+c_1)$

$=0$

∴ $k \cdot A \in W_2$.

∴ 构成.

请求解齐次线性方程组.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \Bigg| \quad A_{2\times 4} X_{4\times 1} = O_{2\times 1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A: 行最简形

x_1, x_3 基本未知量.

x_2、x_4 自由未知量.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 \\ x_3 = x_4. \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

取 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

得两向量: $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \text{(i) } \eta_1, \eta_2 \text{ 是线性无关的一组解向量.} \\ \text{(ii) 任意 } AX=0 \text{ 的解向量均可由 } \eta_1, \eta_2 \text{ 线性表出.} \end{cases}$

基础解系! ∴ 通解为 $k_1\eta_1 + k_2\eta_2$. $k_1, k_2 \in R$.

联系: $V^4 = R^4$ (关于普通的向量 $+$, $\cdot$).

$L \subseteq V$, 其中 $L = \{X \mid A_{2\times 4} X_{4\times 1} = O_{2\times 1}\}$.

△ 判断 L 的运算封闭性:

⊕: $\forall X_1, X_2 \in L$, 则 $AX_1 = 0$, $AX_2 = 0$

∴ $A(X_1 + X_2) = 0$

即 $X_1 + X_2 \in L$.

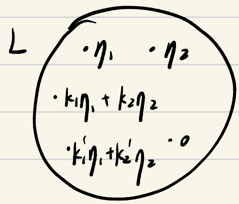
⊙: $\forall k \in R$, $X_1 \in L$, 则 $AX_1 = 0$.

∴ $A \cdot kX_1 = kAX_1 = 0$

∴ $kX_1 \in L$.

$\{X \mid AX = 0\}$ ⇒ 解集合空间!

空间的基.



称 η_1 与 η_2 构成 L 的一组基.

定义 1 : 在线性空间 V 中，如果存在 n 个元素

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n.$$

满足：

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 线性无关.

(2). V 中任一元素 α 总可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示

那么 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 称为线性空间 V 的一个**基**，n 称为线性空间的**维数**.

例 1 : $V = R^3$，求出 V 的一组基

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$Dim(V) = 3.$ 如何论证？$\begin{cases}(i)\\(ii)\end{cases}$

(i). $k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_3 = 0$，只能有 k_1, k_2, k_3 全为 0

$\therefore$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 线性无关.

(ii). $\forall x \in V$. 不妨设 $x = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，则 $x = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3$.

例 2 : $V = R[x]_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in R\}$. 求出一组基.

$\varepsilon_1 = 1 \quad \varepsilon_2 = x, \quad \varepsilon_3 = x^2.$

(i). $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot x + k_3 \cdot x^2 = O = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0.$

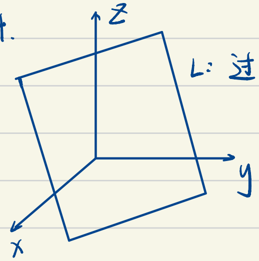
(ii). $\forall x \in V$，不妨设 $x = m$，则 $m = a_0 + a_1x + a_2x^2$

例3. $V=\{\heartsuit\}$ 定义如前，求出一组基.

不存在

不满足 (i)！ $k\{\heartsuit\}$ 线性相关.

例4.



L：过原点的一个平面中所有向量，

$$L \subseteq R^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ x, y, z \in R \right\}$$

(1). 论证 L 是 R^3 的子空间.

(2). 给出 L 的一组基.

(2) 不妨设该平面 $Ax+By+Cz=D$. A、B、C：法向量.

∵ 过原点，代入原点得：$D=0$.

∴ $Ax+By+Cz=0$. $(A\neq 0)$.

解该方程：$x=\frac{B}{-A}y+\frac{C}{-A}z$. 特殊值理解.

$$\eta_1=\begin{pmatrix} -\frac{B}{A} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2=\begin{pmatrix} -\frac{C}{A} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$4x+3y-3z=0$.

$4x=-3y+3z$.

$x=-\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}z$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Dim}(V)=2$.

∴ L 的一组基为 η_1, η_2.

(1). $L=\{M\cdot X=0\}$.

$$X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}.$$

∴ 同上可证封闭性.

维数为n的线性空间称为n维线性空间，记作 V_n，

当一个线性空间 V 中存在任意多个线性无关的向量时，就称V是无限维的.

注：(1). 基不唯一

(2). 基所含的元素的个数唯一（维数）　　类似：极大无关组不唯一！

(3). 不同的基之间是等价的.

例2：$V = R[x]_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in R\}$，求出一组基.

$\varepsilon_1 = 1$　　$\varepsilon_2 = x$，　　$\varepsilon_3 = x^2$.

可能的基：① $1,\ 1-x,\ 1-x^2$　✓

② $1,\ 5,\ x$　×　没有二次

③ $x^2-1,\ x^2+1$　×　数量不对！

④ $x^2-1,\ x^2+1,\ x$　✓

向量组的极大无关组.　　（向量组间的等价性）

△ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r, \beta_1, \cdots \beta_s$ 中的 $\alpha_1, \cdots \alpha_r$ 满足 $\begin{cases} (i)\ \alpha_1 \cdots \alpha_r \text{ 线性无关} \\ (ii).\ \text{任何}\cdots\text{都可由}\alpha_1, \cdots \alpha_r\text{表出} \end{cases}$

则 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_r$ 为最大无关组.

※ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\infty$ 满足，则 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为V的一组基

△ 向量组中的极大无关组不是唯一的，但是不同的极大无关组中的向量个数是相同的，这个个数称作“向量组的秩” $r(\ )$

※ 基不是惟一的，但是这组基中的向量个数是确定的，这个个数称作空间的维度 $\dim(V)$.

线性空间的一组基.

△ 如果向量组 $r_1, \cdots r_r$ 与一组已知的极大无关组 $\alpha_1, \cdots \alpha_r$ 等价，则 $r_1, \cdots r_r$ 也是一个极大无关组.

※ 如果 $\overset{\alpha_1}{1},\ \overset{\alpha_2}{1-x},\ \overset{\alpha_3}{1-x^2}$ 与一组基 $\varepsilon_1=1,\ \varepsilon_2=x,\ \varepsilon_3=x^2$ 等价，则 $1,\ 1-x,\ 1-x^2$ 也是V中的一组基

证：$\varepsilon_1 = 1\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + 0\alpha_3$.

$\varepsilon_2 = 1\cdot\alpha_1 + (-1)\alpha_2 + 0\cdot\alpha_3$.

$\varepsilon_3 = 1\cdot\alpha_3 + 0\cdot\alpha_2 + (-1)\alpha_3$.

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以表出 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$　(i)

另外 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 可以表出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$　(ii)

∴ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与一组已知的基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 等价.

∴ 其成基.

元素在给定基下的坐标.

定义: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 是线性空间 V_n 的一个基, 对于任一元素 $\alpha \in V_n$, 总有且仅有一组有序数 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 使.

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

有序数组 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 称为元素 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 这个基下的坐标, 并记作 $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.

证唯一: 设 $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n$ 为 V 的一组基, $\alpha \in V$. 在基下有 $\alpha = (\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 和 $\alpha = (\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. 下证: $x_1 = y_1, \cdots x_n = y_n$.

证: $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = y_1\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2 + \cdots + y_n\varepsilon_n$

$\therefore (x_1 - y_1)\varepsilon_1 + \cdots + (x_n - y_n)\varepsilon_n = 0$.

$\because \varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n$ 线性无关

$\therefore \begin{cases} x_1 - y_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n - y_n = 0 \end{cases}$ $\quad \therefore x_1 = y_1, \cdots x_n = y_n$.

一个向量所对应基的坐标.

例: 已知 $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = x$, $\varepsilon_3 = x^2$ 是 $V = R[x]_3$ 的基.

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 = 1\cdot\varepsilon_1 + 0\cdot\varepsilon_2 + 0\cdot\varepsilon_3 \overset{\text{(形式上)}}{=\!=} (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(记号)} \\ \alpha_2 = 1 - x = 1\cdot\varepsilon_1 + (-1)\cdot\varepsilon_2 + 0\cdot\varepsilon_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \alpha_3 = 1 - x^2 = 1\cdot\varepsilon_1 + 0\cdot\varepsilon_2 + (-1)\varepsilon_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

V 的一组基 $\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n$, $\forall \alpha \in V$, 都有 $\alpha = a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n = (\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

每一个向量 α, 在给定的一组基下, 都有对应的坐标 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

研究 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的相关性, 可以找到对应的坐标, 看其坐标向量之间的相关性.

例: $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 5$, $\varepsilon_3 = x$.

则 $\alpha_1 = (1, 0, 0)$ $\quad \alpha_2 = (5, 0, 0)$ $\quad \alpha_3 = (0, 1, 0)$

$\therefore \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关.

即 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 线性相关.

例 设 $W_1=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in K^n \mid a_1+a_2+\cdots+a_n=0\}$ 求一组基和维数.

$$AX=0 \qquad X=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} X = 0$$

$\therefore \dim(V)=n-1.$

令 $\begin{pmatrix} a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$

解得 $\eta_1,\eta_2,\cdots \eta_{n-1}.$

坐标变换公式

定理1. 设V_n中的元素α, 在基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$下的坐标为$(x_1,x_2,\cdots x_n)^T$,
在基$\beta_1,\beta_2,\cdots \beta_n$下的坐标为$(x_1',x_2'\cdots x_n')^T$.

若两个基满足关系式

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)P.$$

则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)P^{-1}.$

证: $(\beta_1,\cdots\beta_n)=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)P$

令$(\alpha_1,\cdots\alpha_n)=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)B.$

则 $(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)BP$

$(\beta_1,\cdots\beta_n)E=(\beta_1,\cdots\beta_n)BP.$

$\because$ 基相同.

由唯一性

$\therefore E=BP.$

$\therefore B=P^{-1}$

$$(\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

$\Downarrow$

$(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)P_{n\times n}$ 过渡矩阵.

证: $\begin{cases} \alpha=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \alpha=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}. \end{cases}$

已知 $(\beta_1,\cdots\beta_n)=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)P.$

$\therefore \alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

$\because \alpha=(\alpha_1,\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\because$ 基相同.

由唯一性

$\therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$

例 在 $P[x]_4$ 中取两个基

$\alpha_1 = x^3+2x^2-x$ $\qquad \beta_1 = 2x^3+x^2+1$

$\alpha_2 = x^3-x^2+x+1$ $\qquad \beta_2 = x^2+2x+2$.

$\alpha_3 = -x^3+2x^2+x+1$ $\qquad \beta_3 = -2x^3+x^2+x+2$

$\alpha_4 = -x^3-x^2+1$ $\qquad \beta_4 = x^3+3x^2+x+2$,

求坐标变换公式.

$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n) P.$

$\Rightarrow \quad \varepsilon_1 = 1, \ \varepsilon_2 = x, \ \varepsilon_3 = x^2, \ \varepsilon_4 = x^3.$

$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \cdot A$

$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \cdot B$

$\therefore (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) B \cdot P.$

$\therefore \quad A = B \cdot P.$

$\therefore \quad P = B^{-1} \cdot A.$

子空间的交

定义：设 V_1, V_2 为线性空间 V 的子空间，则集合

$V_1 \cap V_2 = \{\alpha \mid \alpha \in V_1 \text{且} \alpha \in V_2\}$ 也为 V 的子空间。

类似的，多个交集也是 V 的子空间

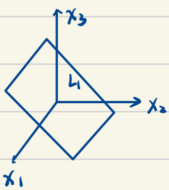
证：$\because 0 \in V_1,\ 0 \in V_2$，$\therefore 0 \in V_1 \cap V_2 \neq \phi$.

任取 $\alpha, \beta \in V_1 \cap V_2$，即 $\alpha, \beta \in V_1$，且 $\alpha, \beta \in V_2$，

则有 $\alpha + \beta \in V_1$，$\alpha + \beta \in V_2$，$\therefore \alpha + \beta \in V_1 \cap V_2$.

同时有 $k\alpha \in V_1$，$k\alpha \in V_2$，$\therefore k\alpha \in V_1 \cap V_2$，$\forall k \in P$.

例：



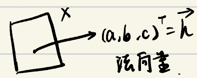
L_1：$\{x \mid x \in R^3,\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\}$

讨论：不妨设 $a \neq 0$. $A = (a, b, c)$. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. $AX = 0$.

则 $x_1 = -\frac{b}{a}x_2 - \frac{c}{a}x_3$，$x_2$ 与 x_3 为自由未知量。令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

则 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\therefore L_1$ 的一组基 η_1, η_2

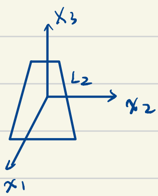
Tips：中学知识



$(x_1, x_2, x_3)^T = X$.

则有 $(x \cdot \vec{n})$

$= ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$.

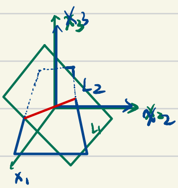


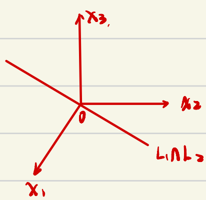
L_2：$\{x \mid x \in R^3,\ dx_1 + ex_2 + fx_3 = 0\}$.

同理：$\xi_1 = \begin{pmatrix} -\frac{e}{d} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{f}{d} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\therefore L_2$ 的一组基为 ξ_1, ξ_2.

交空间：





0 在 $L_1 \cap L_2$ 上.

证：$0 \in L_1$，$0 \in L_2$. $\therefore 0 \in L_1 \cap L_2$.

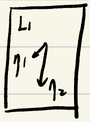
$$L_1 \cap L_2 : \left\{ x \;\middle|\; \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ dx_1 + ex_2 + fx_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \{x \mid AX = 0\} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix}.$$

$\therefore$ 只有一个自由未知量 x_3.

可求 $\gamma_1 = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}$ $\qquad L_1 \cap L_2 = \{k\gamma_1\}$.

如何理解 L_1 的基 η_1,η_2？



η_1,η_2 可表示 L_1 上所有向量，相当于一个新的坐标系

$$A\eta=0.$$

$$L=\{k_1\eta_1+k_2\eta_2\}.$$

$$\triangleq L(\eta_1,\eta_2)$$

定义：V 是一个线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s\in V$. 称 $\alpha_1,\cdots\alpha_s$ 的所有线性组合为 $\alpha_1,\cdots\alpha_s$ 生成的的空间. 记 $L(\alpha_1,\cdots\alpha_s)$.

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_s\alpha_s$

$(k_1,k_2,\cdots k_s\in R)$.

子空间的和

1、定义 设 V_1,V_2 为线性空间 V 的子空间，则集合

$V_1+V_2=\{a_1+a_2 \mid a_1\in V_1,\ a_2\in V_2\}$. 也为 V 的子空间.

证：$\because$ $0\in V_1$，$0\in V_2$ $\quad\therefore$ $0=0+0\in V_1+V_2\neq\phi$

任取 $\alpha,\beta\in V_1+V_2$，设 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，$\beta=\beta_1+\beta_2$，

其中，$\alpha_1,\beta_1\in V_1$，$\alpha_2,\beta_2\in V_2$，则有

$\alpha_1+\beta_1\in V_1$，$\alpha_2+\beta_2\in V_2$

$\therefore$ $\alpha+\beta=(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)\in V_1+V_2$

注意：V 的两个子空间的并集未必为 V 的子空间. 例如

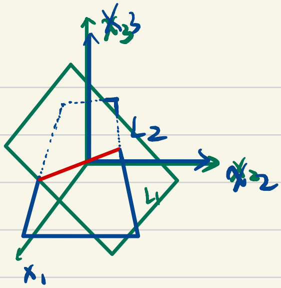
$V_1=\{(a,0,0)\mid a\in R\}$，$V_2=\{(0,b,0)\mid b\in R\}$. 皆为 R^3 的子空间.

但是它们的并集 $V_1\cup V_2=\{(a,0,0),(0,b,0)\mid a,b\in R\}$

$=\{(a,b,0)\mid a,b\in R$ 且 a,b 中至少有一是 $0\}$.

并不是 R^3 的子空间，因为它对 R^3 的运算不封闭，如

$(1,0,0),(0,1,0)\in V_1\cup V_2$，但 $(1,1,0)\notin V_1\cup V_2$



$L_1 \cap L_2 = ?$

$L_1 + L_2 = ?$

$L_1 + L_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \in L_1,\ \alpha_2 \in L_2\}$.

◦ 观察元素 $\alpha = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + l_1\xi_1 + l_2\xi_2$, $\alpha \in L_1 + L_2$.

◦ 结论. $L_1 + L_2 = L(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$

要找 L_1+L_2 的基，就是找 $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ 的极大无关组！

例. 在 $P^{2\times 2}$ 中，令 $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & 0 \end{pmatrix} \middle| x, y \in P \right\}$ $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in P \right\}$

易知，W_1, W_2 皆为 $P^{2\times 2}$ 的子空间. 求 $W_1 \cap W_2$ 及 $W_1 + W_2$.

解：

任取 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$.

$\because X \in W_1$. $\therefore x_{22} = 0$. $x_{11} = x$.

$\because X \in W_2$, $\therefore x_{12} = 0, x_{21} = 0$. $x_{11} = x$

$\therefore X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

再求 $W_1 + W_2$.

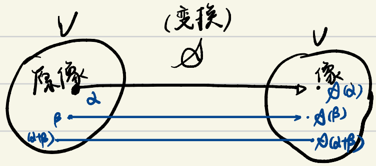
$W_1 = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$W_2 = \left\{ x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\therefore W_1 + W_2 \triangleq L\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

线性无关，就是最大无关组.

线性变换： $V \to V$.



线性变换： $\mathscr{A}(k\alpha + \rho\beta) = k\mathscr{A}\alpha + \rho\mathscr{A}\beta$.

$\mathscr{A}(\alpha+\beta) = \mathscr{A}\alpha + \mathscr{A}\beta$.

和的像 = 像的和.

$\mathscr{A}(k\alpha) = k\mathscr{A}\alpha$.

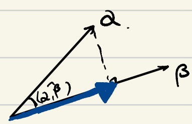
两个典型的线性变换的例子 (分别定义在 R^n 和 $R[x]_n$).

例1： $V = R^n$. 线性变换 P_β (投影变换)　　β 是固定的.

[定义] $\forall \alpha \in V$　$P_\beta(\alpha) \triangleq \dfrac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta$.　↗把 α 投影到 β 上.

△ 分析当 $n=2$ 时，$P_\beta(\ )$ 的平面几何意义.

△ 这个变换与 schmidt 正交化之间的联系.



解： $V \to V$

$$\alpha \longmapsto \frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta.$$

$$\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta = \frac{|\alpha|\cdot|\beta|\cdot\cos(\widehat{\alpha,\beta})}{|\beta|\,|\beta|\cdot 1}\cdot\beta$$

$$= |\alpha|\cos(\widehat{\alpha,\beta})\cdot\left(\frac{1}{|\beta|}\cdot\beta\right)$$

验证： $\forall \alpha, \gamma \in V$　$\forall k \in R$.

(i). $P_\beta(\alpha+\gamma) = \dfrac{(\alpha+\gamma,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta = \dfrac{(\alpha,\beta)+(\gamma,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta = P_\beta(\alpha) + P_\beta(\gamma)$.

(ii). $P_\beta(k\alpha) = \dfrac{(k\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta = \dfrac{k(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta = kP_\beta(\alpha)$

例2： $V=\mathbb{R}[x]_n$，线性变换 $\mathcal{D}$（微分(商)变换）

[定义] $\forall \alpha\in V$，不妨设 $\alpha=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$

$$D(\alpha)=a_1+2a_2x+\cdots+(n-1)a_{n-1}x^{n-2} \quad (\text{同 } f'(x) \text{ 定义})$$

△ 如何验证上述定义的 $\mathcal{D}$ 是 V 上的线性变换

验证 $\mathcal{A}$ 是变换的证明逻辑：$\forall \alpha\in V$，$\mathcal{A}(\alpha)\in V$ （变换 $f: S\to S$ 自身，否则只叫映射）

验证：$\forall \alpha,\beta\in V$

不妨设 $\alpha=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$

$\beta=b_0+b_1x+\cdots+b_{n-1}x^{n-1}$.

(i) $\alpha+\beta=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}$

$$D(\alpha+\beta)=a_1+b_1+2(a_2+b_2)x+\cdots+(n-1)(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-2}$$

$$=a_1+2a_2x+\cdots+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+b_1+2b_2x+\cdots+(n-1)b_{n-1}x^{n-2}$$

$$=D(\alpha)+D(\beta)$$

(ii). $\forall k\in\mathbb{R}$.

$$k\alpha=ka_0+ka_1x+\cdots+ka_{n-1}x^{n-1}$$

$$D(k\alpha)=ka_1+2ka_2x+\cdots+(n-1)ka_{n-1}x^{n-2}$$

$$=k\,(a_1+2a_2x+\cdots+(n-1)a_{n-1}x^{n-2})$$

$$=k\,D(\alpha).$$

例3：　$V=R^n$　给定一个矩阵 $A_{n\times n}$，定义 $\mathscr{A}(\ )$

$\forall X\in R^n$，$\mathscr{A}X \triangleq AX$

(0)　$\forall X\in R^n$，$\mathscr{A}(X) = A_{n\times n}X_{n\times 1} \in R^n = V$.

(1).　$\forall X, Y\in V$，$\mathscr{A}(X+Y) = A(X+Y) = A\cdot X + A\cdot Y = \mathscr{A}(X) + \mathscr{A}(Y)$.

(2).　$\forall k\in R$，$\mathscr{A}(k\cdot X) = A\cdot kX = k\cdot AX = k\mathscr{A}(X)$.

[定义] 像空间 $\mathscr{A}(V)$

$$\mathscr{A}(V) = \{\beta \mid \beta = \mathscr{A}\alpha,\ \forall \alpha\in V\}$$

△ 几个例子.

$P_\beta(R^n) = L(\beta) = \{k\beta \mid k\in R\}$.

$D(R[x]_n) = R[x]_{n-1}$.

$\mathscr{A}(X) = AX$ 定义下，$\mathscr{A}(R^n) = \{AX \mid X\in R^n\}$.

$\mathcal{O}(V) = \{0\}$.

[定义] $\mathcal{O}$（零变换）　$\forall \alpha\in V$，$\mathcal{O}(\alpha) = \mathcal{O}$

线性变换的性质.

(1). $T(0)=0$，$T(-\alpha) = -T(\alpha)$.

证明：取 $\alpha\in V$.　$\mathscr{A}(\alpha) + \mathscr{A}(0) = \mathscr{A}(\alpha+0) = \mathscr{A}(\alpha)$.

$\therefore \mathscr{A}(0) = 0$.

$\mathscr{A}(\alpha+(-\alpha)) = \mathscr{A}(0) = \mathscr{A}(\alpha) + \mathscr{A}(-\alpha) = 0$.

$\therefore \mathscr{A}(\alpha) = -\mathscr{A}(\alpha)$.

(2). 若 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$，则 $T\beta = k_1T\alpha_1 + k_2T\alpha_2 + \cdots + k_mT\alpha_m$.

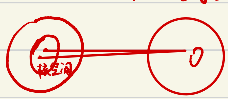
(3). 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性相关，则 $T\alpha_1, T\alpha_2, \cdots, T\alpha_m$ 也线性相关.

(4). 线性变换 T 的像集是 V 的子空间，称为 T 的像空间

证　封闭性.

(5). 使 $T\alpha=0$ 的 α 的全体 $\{\alpha \mid \alpha\in V,\ T\alpha=0\}$ 也是 V 的子空间，称为线性变换 T 的核，记为 $T^{-1}(0)$

△ 核空间　$\ker(\mathscr{A})$，$\mathscr{A}^{-1}(0)$.　$\mathscr{A}^{-1}(0) = \{\alpha \mid \mathscr{A}\alpha = \mathcal{O}\}$　（$\mathcal{O}$ 向量的原像）



△ 例子

$V=R^n$，$P_\beta^{-1}(0) = \{(\alpha,\beta)=0,\ \alpha\in V\} = L(\beta^T)$　$\beta^T\neq 0$ 且 $(\beta,\beta^T)=0$

微商．全体实数求导为0！

$V=R[x]_n$．$D^{-1}(0) = R$.

$\mathscr{A}(X)=AX$ 定义下，$\mathscr{A}^{-1}(0) = \{X \mid AX=0,\ X\in R^n\}$

$\mathcal{O}^{-1}(0) = \{\alpha \mid \alpha\in V\}$.

线性变换的矩阵

(1)、设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V_n 的一个基，如果 V_n 的线性变换 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 在这组基上的作用相同，即

$$\mathscr{A}(\varepsilon_i) = \mathscr{B}(\varepsilon_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则 $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

证两个映射相等

证：（证明逻辑：若需证 $f(\cdot) = g(\cdot)$，则只需证明 $\forall x$，$f(x) = g(x)$）

$\forall \alpha \in V$，α 永可由 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 线性表出，不妨记作

$$\begin{cases} \alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ \mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{A}(x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n) = \mathscr{A}(x_1\varepsilon_1) + \cdots + \mathscr{A}(x_n\varepsilon_n) = x_1\mathscr{A}\varepsilon_1 + \cdots + x_n\mathscr{A}\varepsilon_n. \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 是 α 在 $(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)$ 下的坐标.

$$= \underbrace{(\mathscr{A}\varepsilon_1, \cdots \mathscr{A}\varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

$$\overset{\text{形式上}}{\triangleq} \mathscr{A}(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

不可看成 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 是 α 在 $(\mathscr{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathscr{A}\varepsilon_n)$ 下的坐标.

原因：不能证 $\mathscr{A}\varepsilon_1 \dots \mathscr{A}\varepsilon_n$ 线性无关，如零变换.

$$\mathscr{B}(\alpha) = x_1\mathscr{B}\varepsilon_1 + \cdots x_n\mathscr{B}\varepsilon_n = (\mathscr{B}\varepsilon_1, \cdots \mathscr{B}\varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\triangleq \mathscr{B}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$\therefore \mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{B}(\alpha)$.

$\because \forall \alpha \in V$，$\mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{B}(\alpha)$ $\quad \therefore \mathscr{A} = \mathscr{B}$.

逻辑："一个变换在一组基下的矩阵"

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n) = (\mathscr{A}\varepsilon_1, \cdots, \mathscr{A}\varepsilon_n).$$

$$= (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)A.$$

$\mathscr{A}\varepsilon_i \in V$，$\mathscr{A}\varepsilon_i = (\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)\begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$.

$$(\mathscr{A}\varepsilon_1, \cdots \mathscr{A}\varepsilon_i, \cdots \mathscr{A}\varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)\begin{pmatrix} \vdots & a_{1i} & \vdots \\ \vdots & a_{2i} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_{ni} & \vdots \end{pmatrix}.$$

$$\mathscr{A}(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)A.$$

逻辑："一个向量在一组基下的坐标"

$$\alpha = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

加上 $\alpha = (\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

则 $\underbrace{\mathscr{A}(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

$$\| $$

$$\mathscr{A}(\alpha). = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

A 的作用：

α 在 $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ 下的坐标是 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\mathscr{A}\alpha$ 在 $(\varepsilon_1, \cdots \varepsilon_n)$ 下的坐标是 $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

注：A 清楚了，则 $\mathscr{A}(\alpha)$ 就清楚了.

练习：（课后 P222. T14）

设 $\mathscr{A}$ 是 R^2 上的线性变换． $\mathscr{A}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$． $\mathscr{A}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

问：① 取 $\alpha=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$\mathscr{A}\alpha=$?

② 求 $\mathscr{A}$ 在基 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 下的矩阵

解：② (i) $V=R^2=L(e_1,e_2)=L(\alpha_1,\alpha_2)$． $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 也是一组基．

(ii) $\begin{cases}\mathscr{A}\alpha_1=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}=5e_1+(-1)e_2=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\\ \mathscr{A}\alpha_2=\text{-----}=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\end{cases}$ $\Big\}$ $(\mathscr{A}\alpha_1,\mathscr{A}\alpha_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}5&3\\-1&-2\end{pmatrix}$.

$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}5&3\\-1&-2\end{pmatrix}$

(iii) $(\mathscr{A}e_1,\mathscr{A}e_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}?\end{pmatrix}$.

(iv) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=1\cdot e_1+3\cdot e_2=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

类似的 $\alpha_2=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

$\therefore (\alpha_1,\alpha_2)=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}1&2\\3&-1\end{pmatrix}$.　简记为 $(\alpha_1,\alpha_2)=(e_1,e_2)D$.

$(\alpha_1,\alpha_2)D^{-1}=(e_1,e_2)$.

$\mathscr{A}(e_1,e_2)\overset{(iv)}{=}\mathscr{A}((\alpha_1,\alpha_2)D^{-1})\overset{(ii)}{=}(e_1,e_2)\underline{\underline{\begin{pmatrix}5&3\\-1&-2\end{pmatrix}D^{-1}}}$.

① $\forall\alpha=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$=(e_1,e_2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\mathscr{A}\alpha=(e_1,e_2)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Taylor 展开

$$\begin{cases} f(x) \text{ 为一实连续可微函数.} \\ x_0 \text{ 为一常数} \\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dfrac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + o(x-x_0)^3 \end{cases}$$

把 $f(x)$ 特殊化，取 $f(x) \in R[x]_3$，$\forall f(x) \in R[x]_3$，

不妨设
$$\begin{cases} f(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \text{. 依 Taylor 展开，当取 } x_0 = 1 \\ f(x) = \underline{f(1)} \cdot 1 + \underline{f'(1)}(x-1) + \underline{\dfrac{f''(1)}{2}}(x-1)^2 + \underline{\dfrac{f'''(1)}{3!}}(x-1)^3 \end{cases}$$

同一个 $f(x)$ 在基 $1, x, x^2, x^3$ 和另一组基 $1, (x-1), \dfrac{(x-1)^2}{2!}, \dfrac{1}{3!}(x-1)^3$ 下有不同的坐标.

$$\begin{cases} f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2. & f'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3. \\ f''(x) \quad 2a_2 + 6a_3 x. & f''(1) = 2a_2 + 6a_3. \\ f'''(x) = 6a_3. & f'''(1) = a_3. \end{cases}$$

$$f(x) = (1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \xlongequal{\text{同时}} \left(1, x-1, \frac{(x-1)^2}{2!}, \frac{(x-1)^3}{3!}\right)\begin{pmatrix} f(1) \\ f'(1) \\ f''(1) \\ f'''(1) \end{pmatrix}$$

例：$V = R[x]_3 = L(1, x, x^2, x^3)$，线性变换 D 为微分变换.

请问：微分变换 D 在上述两组基下对应以及两个矩阵之间的运算关系

$$D\varepsilon_1 = 0 = 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 + 0\varepsilon_4$$
$$D\varepsilon_2 = 1 = 1\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 + 0\varepsilon_4$$
$$D\varepsilon_3 = 2x = 0\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 + 0\varepsilon_4.$$
$$D\varepsilon_4 = 3x^2 = 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + 0\varepsilon_4$$

(1) 由右例

$$D(1, x, x^2, x^3) = (1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A$$

求 $D\left(1, x-1, \dfrac{(x-1)^2}{2!}, \dfrac{(x-1)^3}{3!}\right) = \left(1, x-1, \dfrac{(x-1)^2}{2!}, \dfrac{(x-1)^3}{3!}\right)\begin{pmatrix} & B & \end{pmatrix}$

$$\left(1, x-1, \frac{(x-1)^2}{2!}, \frac{(x-1)^3}{3!}\right) = (1, x, x^2, x^3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad P$$

$$D1 = 0 = \left(1,\ x-1,\ \frac{(x-1)^2}{2!},\ \frac{(x-1)^3}{3!}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$D(x-1) = 1 = (\ \cdots\cdots\ )\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$D\left(\frac{(x-1)^2}{2!}\right) = x-1 = (\ \cdots\cdots\ )\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

$$D\left(\frac{(x-1)^3}{3!}\right) = \frac{1}{2!}(x-1)^2 = (\ \cdots\cdots\ )\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad B = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

例 $\mathscr{A}x \triangleq AX$，$\mathscr{A}$是$V=R^n$上的线性变换.

已知A: $A\underset{\sim}{X}=\lambda X$，$(A-\lambda E)X=0$

特征向量$X\neq 0$.

$|A-\lambda E|=0$，求出λ.

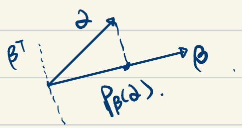
$\mathscr{A}$定义在V上的线性变换.

$$\mathscr{A}\alpha=\lambda\alpha.$$

例1: D是$V=R[x]_3$的线性变换，求D的特征值和特征向量

$k\in R$，k是特征值为0的特征向量.

例2. P_β是$V=R^2$的投影向量.



$$\begin{cases} P_\beta(k\beta)=1\cdot k\beta \\ P_\beta(\beta)=1\cdot\beta \\ P_\beta(k\cdot\beta^T)=0 \\ \quad = 0\cdot k\beta^T \end{cases}$$

- β是特征值为1的特征向量.
- $k\beta\,(k\neq 0)$是特征值为1的特征向量.

- $k\beta^T\,(k\neq 0)$是特征值0的特征向量.

一般性的计算方法:(如下). $V_n=L(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)$

$$\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\quad \mathscr{A}\alpha=\lambda\alpha.$$

$$\underline{\mathscr{A}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_n)}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\lambda(\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}.$$

$$\|$$

$$\underline{(\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n)A}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=(\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_n)\lambda\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}.$$

$$\boxed{A\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}}$$

$AX=\lambda X$

$\downarrow$

α在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$下的坐标$\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$.