11.2 分配格，有补格与布尔代数

主要内容

- 分配格
- 有补格
- 布尔代数

定义13.7 设$<L, \wedge, \vee>$是格.

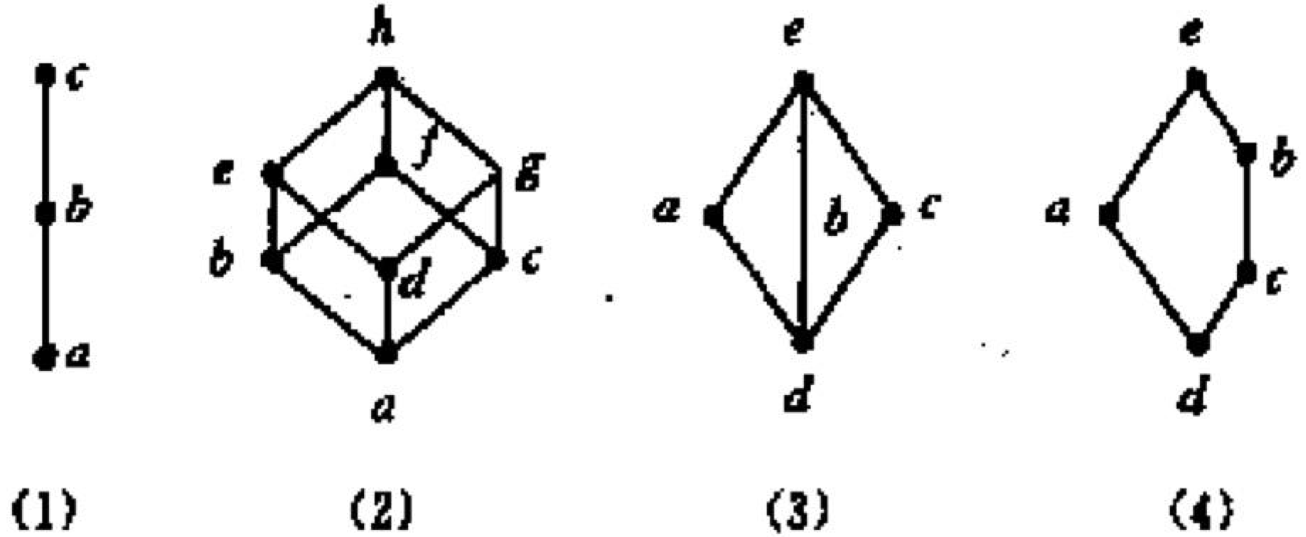
$\forall$ a,b,c $\in$ L有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

成立,则称L为分配格.

图中(1)、(2)、(3)、(4)是分配格吗?



$(3)a \wedge (b \vee c) = a \wedge e = a$

$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = d \vee d = d$ (钻石格)

$(4)b \wedge (a \vee c) = b \wedge e = b$

$(b \wedge a) \vee (b \wedge c) = d \vee c = c.$ (五角格)

定理11.5 设$<L,\leq>$为分配格,当且仅当L中不含有与钻石格或者五角格同构的子格。

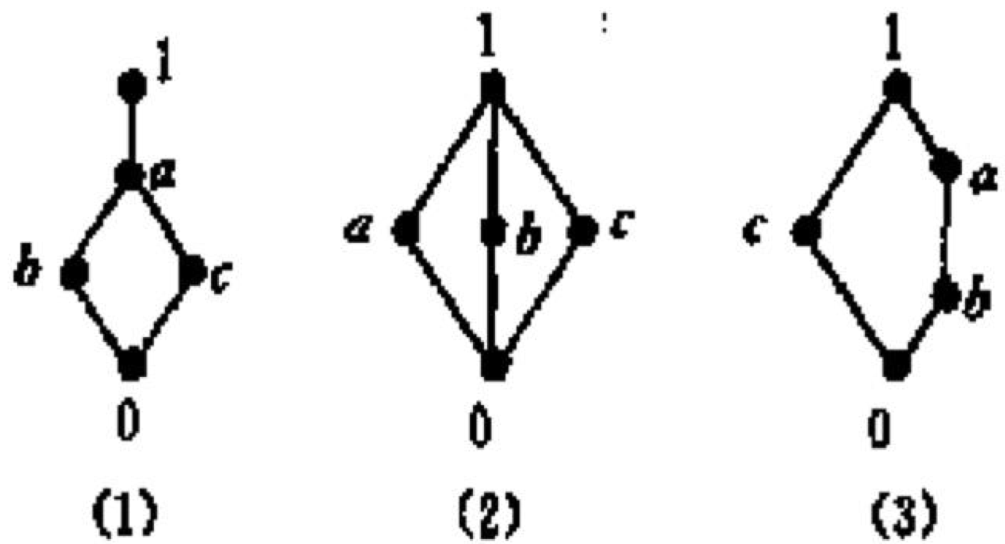
证明：略。

全上界、全下界

定义13. 8 若在格$<L,\wedge,\vee>$中存在一个元素a,$\forall b\in L$, $a\leq b$或$(b\leq a)$,则称a为格L的全下界(或全上界)

定义13. 9 对于一个格L,全下界如果存在,则是唯一的,记为0.同样地,若全上界存在,则也是唯一的,记为1,具有全上界和全下界的格称为有界格,记作$<L,\wedge,\vee,0,1>$

定义13.10 设$\langle L,\wedge,\vee,0,1\rangle$是有界格$\forall a\in L$,若存在$b\in L$使得$a\wedge b=0, a\vee b=1$,则称$b$为$a$的补元.



(1)的a,b,c都不存在补元,0与1互为补元.

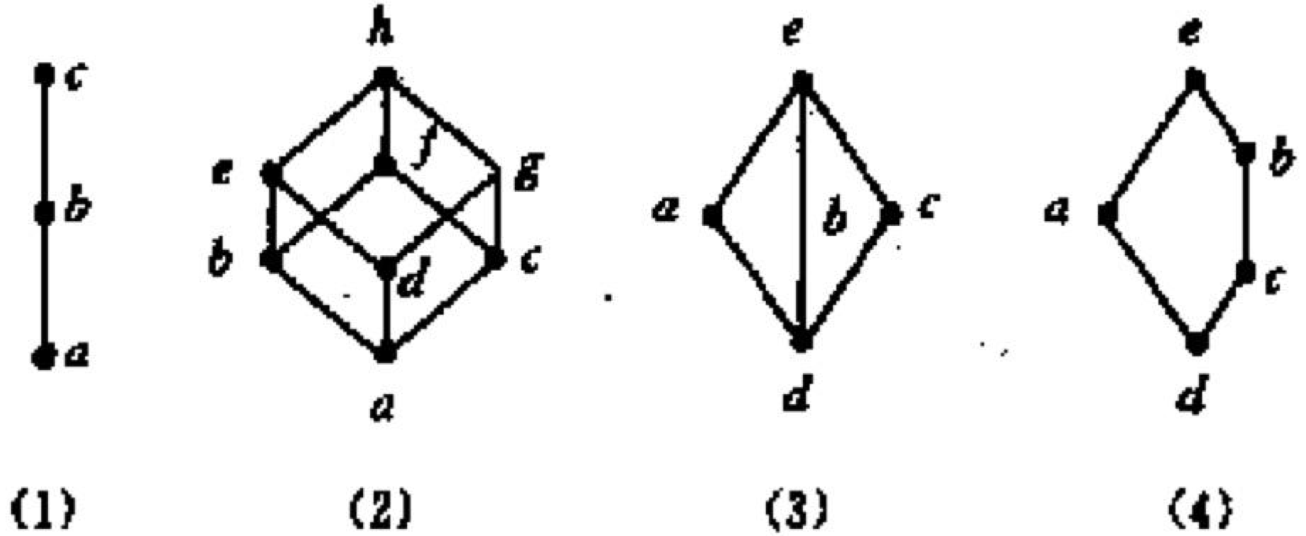
(2)的a,b,c中任意两个都互为补元, 0与1互为补元.

(3)中a和b的补元都是c,而c的补元是a和b,0与1互为补元.

定义13. 11 如果格中每个元素都至少有一个补元,称这个格为**有补格**.

对分配格L来说,如果a ∈ L有补元,则一定有唯一的补元,a’.

有补格



图中(2),(3)和(4)是有补格,而(1)不是.

(1) a为全下界， c为全上界， a与c互为补元， b没有补元.

(2) a为全下界， h为全上界， 每个元素都有补元， 例如h是a的补元， g是b的补元， e是c的补元， 等等.

(3) d为全下界， e为全上界， d与e互为补元， a的补元有b,c, 等等.

(4) d为全下界， e为全上界, d与e互为补元， a的补元有b,c, 等等.

布尔格、布尔代数

定义13.12 如果格<L,∧,∨,0,1>是有补分配格,则称L为布尔格,也叫做布尔代数.

由于布尔代数L中的每个元都有唯一的补元,求补运算也可以看成是L中的一元运算.

因此,布尔代数L可记为<L,∧,∨,',0,1>,其中'表示求补运算.

布尔代数的等价定义

定义13.13(公理化定义): 有两个二元运算的代数$\langle B,*,\oplus\rangle$称为布尔代数,如果对任意元素$a,b,c\in B$,成立

①(交换律) $a*b=b*a, a\oplus b=b\oplus a$;

②(分配律) $a*(b\oplus c)=(a*b)\oplus(a*c)$,

$a\oplus(b*c)=(a\oplus b)*(a\oplus c)$;

③(同一律)存在$0,1\in B$,使得$a*1=a, a\oplus 0=a, a\in B$;

④(有补律) B的每一元a都有(唯一)$a'\in S$,使得

$$a*a'=0,\ a\oplus a'=1.$$

注:布尔代数的两个定义是等价的(证明略).

例

- 集合代数<P(S),∩,∪,~,∅,S>是布尔代数.
- 开关代数<{0,1},∧,∨,¬,0,1>是布尔代数,其中∧为与运算,∨为或运算, ¬为非运算.

布尔代数有以下性质

定理13.10 设$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$是布尔代数,则有:

- $\forall a \in B, (a')' = a$(双重否定律),
- $\forall a,b \in B$, $(a \vee b)' = a' \wedge b'$

  $(a \wedge b)' = a' \vee b'$

(德摩根律)

布尔代数的子代数

布尔代数$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$的子集S称为B的子布尔代数,如果S对运算$\wedge, \oplus, '$封闭和$0,1 \in S$.

子布尔代数本身是布尔代数.

每个布尔代数$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$都有两个平凡的子布尔代数:自身和$\{0,1\}$.

(封闭性: $0 \wedge 0=0 \wedge 1=0$; $1 \wedge 1=1$;

$0 \vee 1=1 \vee 1=1$; $0 \vee 0=0$;

$0'=1$; $1'=0$.)

子布尔代数举例

定义:设$\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$为布尔代数,封闭区间[a,b]定义为由a,b界定的线性序子集:

$$[a,b]=\{x \mid x\in B \text{ 且 } a\le x\le b\}, \text{其中 } a,b\in B.$$

命题:封闭区间[a,b]是布尔代数

布尔同态与布尔同构

二布尔代数之间的映射

$f:\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle \to \langle B',\wedge',\vee',\neg,0',1'\rangle$

称为布尔同态,如果对任意$a,b\in B$,有$f(a\wedge b)=f(a)\wedge' f(b)$;

$f(a\vee b)=f(a)\vee' f(b)$;

$f(a')=\neg f(a)$;

$f(0)=0'$,

$f(1)=1'$.

若f还为双射,则称f为布尔同构.

举 例

若用B_n的元素表示n元集S的幂集ρ(S)的元素,
则可用$X \wedge Y$表示$X \cap Y$;
$X \vee Y$表示$X \cup Y$;
$\neg X$表示补集X'; 以及
用0,1分别表示∅,S.
不难看出:
n 元集的幂集代数与 n元开关代数是布尔同构的.

有限布尔代数的表示定理

定理13.11 若B是有限布尔代数,则B含有2^n个元$(n \in N)$,

并且B与$<P(S),\cap,\cup,\sim,\varnothing,S>$同构,

其中S是一个n元集合.

举例

格$\langle S_{12}$,gcd.lcm$\rangle$是布尔代数吗?

解: $S_{12}=\{1,2,3,4,6,12\}$的元素个数6,

不是2的整数幂,

故不是布尔代数.

不难看出2没有补元,因为

$2\vee x=\mathrm{lcm}(2,x)=12$当且仅当

$x=12$,

而12的补元是1而不是2.

证明布尔恒等式

试证:$(a\wedge c)\vee(a'\wedge b)\vee(b\wedge c)=(a\wedge c)\vee(a'\wedge b)$.

布尔表达式与布尔函数

设$\langle B,\wedge,\vee,',0,1\rangle$为布尔代数.

取值于B中元素的变元称为布尔变元;

B中元素(包括0,1)称为布尔常元.

由布尔变元,布尔常元经有限次$\wedge,\vee,'$运算形成的式子称为B上布尔表达式.

例:对布尔代数$B=\langle\{a,b,0,1\},\wedge,\vee,',0,1\rangle$,布尔表达式

$$f=a\wedge(0\vee b)\wedge(a\vee b');$$

$$g=(a\wedge x_1)\vee(a\wedge b'\wedge x_2)\vee(x_1'\wedge x_2\wedge 0);$$

$$h=x_1\wedge(x_2\vee x_3)'.$$

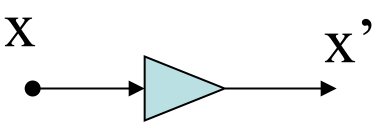
含n个布尔变元的布尔表达式称为B上一个n元布尔函数.

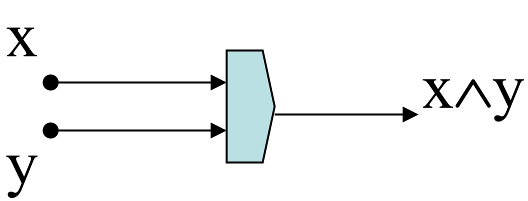
应用:逻辑门代数

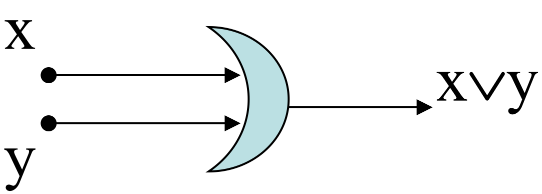
计算机部件及其网络或其它电子装置都是由许多电路构成,这类电路设计常要用到开关代数的布尔表达式与布尔函数的概念.

此类布尔表达式可用带3个基本元件的电路来实现.3个基本元件是:

①反相器　　②与门　　③或门

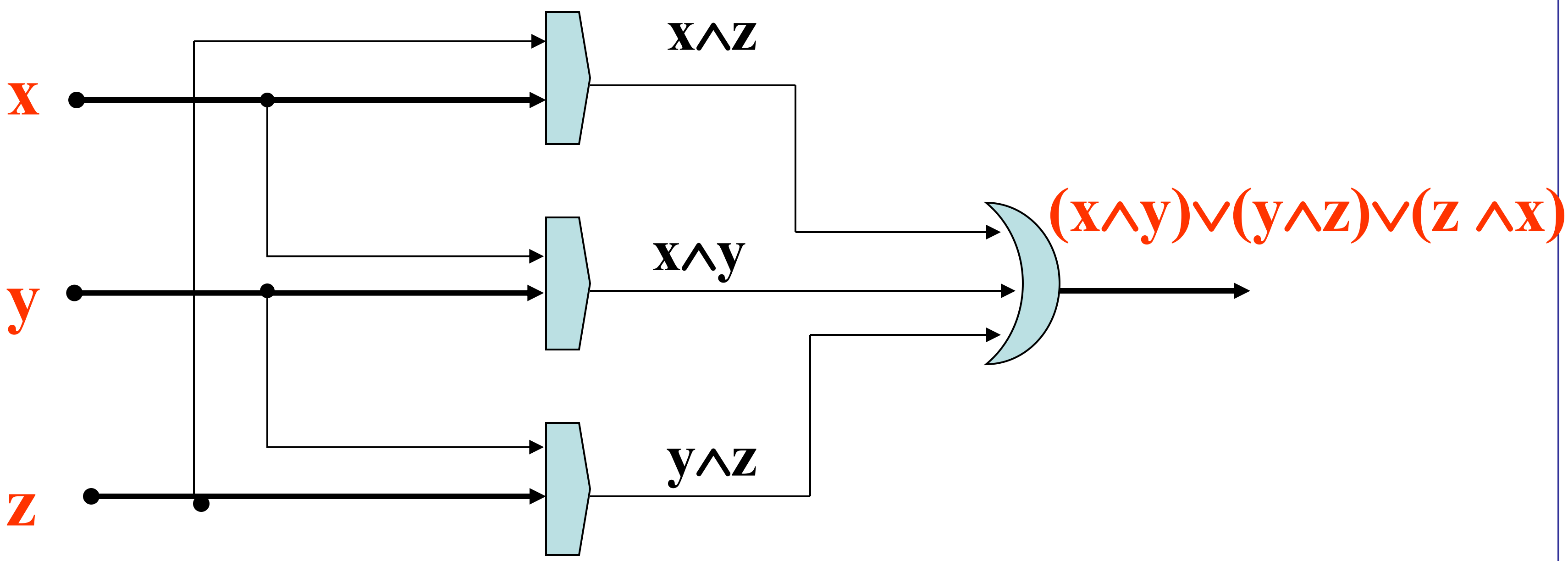






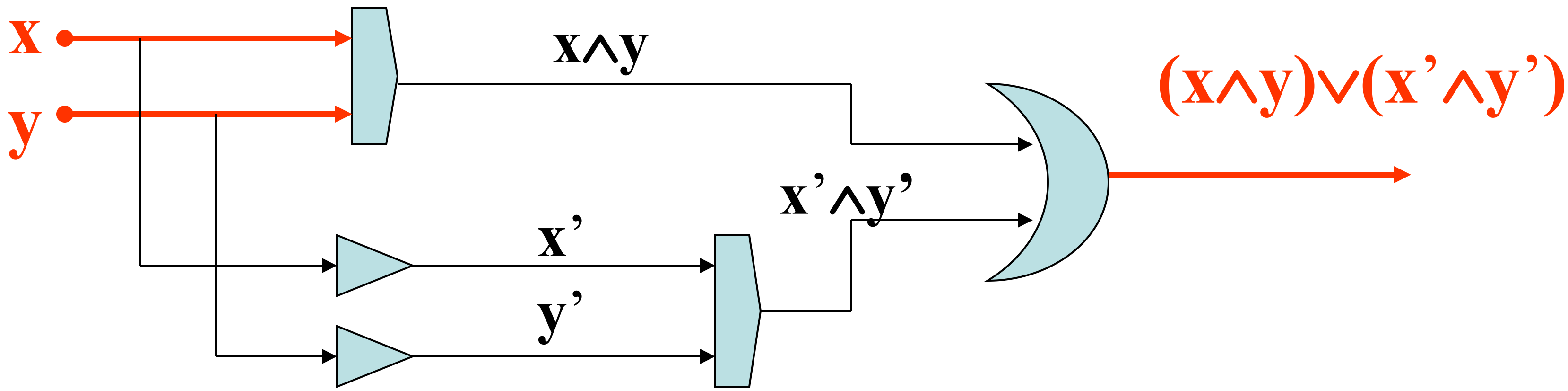
实例之一

实例1: 三人委员会表决某个提案,如有两张赞成票即获通过,实现上述过程的表决机器的控制电路如下图所示:



实例之二

实例2: 设计两个房间照明灯具的开关控制电路使当灯具处于关闭状态时,按下任一开关都可打开此灯具;当灯具已打开时,按下任一开关都可关闭此灯具.实现上述过程的组合电路如下图所示:



注:也可用布尔函数$(x'\vee y)\wedge(x\vee y')$来设计线路.