2.2 析取范式与合取范式

定义2.2

(1) 文字——命题变项及其否定的总称

(2) 简单析取式——有限个文字构成的析取式

p, $\neg q$, $p \vee \neg q$, $p \vee q \vee r$, …

(3) 简单合取式——有限个文字构成的合取式

p, $\neg q$, $p \wedge \neg q$, $p \wedge q \wedge r$, …

简单析取式与合取式

定理 2.1

1.一个简单析取式是重言式当且仅当它同时含某个命题变项p及它的否定式$\neg p$。

2.一个简单合取式是矛盾式当且仅当它同时含某个命题变项p及它的否定式$\neg p$。

析取范式与合取范式

定义2.3

(1) **析取范式**——由有限个简单合取式组成的析取式

p, $\neg p \vee q$, $p \vee \neg q$, $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r)$

(2) **合取范式**——由有限个简单析取式组成的合取式

p, $p \wedge \neg q$, $\neg p \wedge q$, $(p \vee q \vee \neg p) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$

(3) **范式**——析取范式与合取范式的总称

说明:

1. 单个文字既是简单析取式，又是简单合取式
2. 形如 $p \wedge \neg q \wedge r$, $\neg p \vee q \vee \neg r$ 的公式既是析取范式，又是合取范式

析取范式与合取范式

定理 2.2

1.一个析取范式是矛盾式当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式。

2.一个合取范式是重言式当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

范式存在定理

定理2.3 （范式存在定理）

任何命题公式都存在与之等值的析取范式与合取范式。

求公式的范式的步骤

公式A的析取(合取)范式——与A等值的析取(合取)范式

求公式A的范式的步骤:

(1) 消去A中的$\rightarrow$, $\leftrightarrow$ （若存在）

$$A\rightarrow B \Leftrightarrow \neg A\vee B$$

$$A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$$

(2) 否定联结词$\neg$的内移或消去

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A$$

$$\neg(A\vee B)\Leftrightarrow \neg A\wedge\neg B$$

$$\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow \neg A\vee\neg B$$

(3) 使用分配律

$A\vee(B\wedge C)\Leftrightarrow(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ 求合取范式

$A\wedge(B\vee C)\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ 求析取范式

求命题公式的范式

例1： 求下列公式的析取范式与合取范式

(1) $(p \to \neg q) \vee \neg r$

(2) $(p \to \neg q) \to r$

极小项与极大项

定义2.4

在含有n个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第i个文字出现在左起第i位上（$1\le i\le n$），称这样的简单合取式（简单析取式）为**极小项**（**极大项**）.

极小项与极大项

几点说明：

1. n个命题变项有2^n个极小项和2^n个极大项

2. 2^n个极小项（极大项）均互不等值

3. m_i : 第i个极小项.;其中i是该成真赋值的十进制表示

   M_i: 第i个极大项;其中i是该成假赋值的十进制表示

两个命题的极小项与极大项

由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0	$p\vee q$	0 0	M_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1	$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2	$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$p\wedge q$	1 1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

三个命题的极小项与极大项

由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项与极大项.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

极小项与极大项的关系

定理2.4 m_i与M_i的关系：$\neg m_i \Leftrightarrow M_i$，$\neg M_i \Leftrightarrow m_i$

主析取范式与主合取范式

定义2.5

主析取范式——由极小项构成的析取范式

主合取范式——由极大项构成的合取范式

例如，n=3, 命题变项为 p, q, r 时,

$$(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r) \Leftrightarrow m_1\vee m_3$$ ——主析取范式

$$(p\vee q\vee\neg r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee\neg r) \Leftrightarrow M_1\vee M_7$$——主合取范式

注意：公式A的主析取(合取)范式——与A 等值的主析取(合取)范式

主范式的存在惟一定理

定理2.5 (主范式的存在惟一定理)

任何命题公式都存在与之等值的主析取范式和主合取范式, 并且是惟一的。

求公式主范式的步骤

求公式主析取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的析取范式$A'=B_1\vee B_2\vee \ldots \vee B_s$, 其中$B_j$是简单合取式 $j=1,2,\ldots,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\wedge(p_i\vee\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\wedge p_i)\vee(B_j\wedge\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单合取式都是长度为n的极小项为止

(3) 消去重复出现的极小项, 即用m_i代替$m_i\vee m_i$

(4) 将极小项按下标从小到大排列

实例

例2: 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$ 的主析取范式

求公式主范式的步骤

求公式的主合取范式的步骤:

设公式A含命题变项$p_1,p_2,\ldots,p_n$

(1) 求A的合取范式$A'=B_1\wedge B_2\wedge \ldots \wedge B_s$, 其中$B_j$是简单析取式 $j=1,2,\ldots,s$

(2) 若某个B_j既不含p_i, 又不含$\neg p_i$, 则将B_j展开成

$$B_j \Leftrightarrow B_j\vee(p_i\wedge\neg p_i) \Leftrightarrow (B_j\vee p_i)\wedge(B_j\vee\neg p_i)$$

重复这个过程, 直到所有简单析取式都是长度为n的极大项为止

(3) 消去重复出现的极大项, 即用M_i代替$M_i\wedge M_i$

(4) 将极大项按下标从小到大排列

实例

例3： 求公式 $A=(p\to\neg q)\to r$的主合取范式

主范式的应用

1.求公式的成真、成假赋值

设公式A含n个命题变项, A的主析取范式有s个极小项, 则A有s个成真赋值, 它们是极小项下标的二进制表示, 其余2^n-s个赋值都是成假赋值

例如 $(p\rightarrow\neg q)\rightarrow r \Leftrightarrow m_1\vee m_3\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

成真赋值为 001, 011, 101, 110, 111,

成假赋值为 000, 010, 100.

类似地，由主合取范式也立即求出成假赋值和成真赋值.

主范式的应用

2. 判断公式的类型

设A含n个命题变项.

A为重言式 $\Leftrightarrow$ A的主析取范式含全部2^n个极小项

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式不含任何极大项.

A为矛盾式 $\Leftrightarrow$ A的主合析取范式含全部2^n个极大项

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式不含任何极小项0.

A为非重言式的可满足式

$\Leftrightarrow$ A的主析取范式中至少含一个、但不是全部极小项.

$\Leftrightarrow$ A的主合取范式中至少含一个、但不是全部极大项.

主范式的应用

例4: 用主析取范式判断公式的类型:

(1) $A \Leftrightarrow \neg(p \to q) \wedge q$

(2) $B \Leftrightarrow p \to (p \vee q)$

(3) $C \Leftrightarrow (p \vee q) \to r$

主范式的应用

3. 判断两个公式是否等值

例5: 用主析取范式判断以下公式是否等值

$p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

用成真赋值和成假赋值确定主范式

由主析取范式确定主合取范式

例10 设A有3个命题变项, 且已知$A = m_1 \vee m_3 \vee m_7$, 求$A$的主合取范式.

解 A的成真赋值是1,3,7的二进制表示, 成假赋值是在主析取范式中没有出现的极小项的下角标0,2,4,5,6的二进制表示, 它们恰好是A的主合取范式的极大项的下角标, 故

$$A \Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6$$