第二章 命题逻辑等值演算

主要内容

2.1 等值式

等值演算与置换规则

2.2 析取范式与合取范式

主析取范式与主合取范式

2.3 联结词完备集

2.1 等值式

定义2.1 若等价式$A \leftrightarrow B$是重言式，则称A与B等值，记作$A \Leftrightarrow B$，并称$A \Leftrightarrow B$是等值式

几点说明：

1. 定义中$\Leftrightarrow$不是联结符，为元语言符号

2. A或B中可能有哑元出现.

例如 $(p \to q) \Leftrightarrow ((\neg p \lor q) \lor (\neg r \land r))$ r为左边公式的哑元.

3. 用真值表可检查两个公式是否等值.

真值表检验等值

例1： 判断下列各组公式是否等值:

(1) $p\to(q\to r)$ 与 $(p\land q)\to r$

等值式例题

(2) $p \to (q \to r)$ 与 $(p \to q) \to r$

基本等值式

1. 双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
2. 幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A$, $A \wedge A \Leftrightarrow A$
3. 交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$, $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
4. 结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$, $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
5. 分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$,
   $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
6. 德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
   $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
7. 吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$, $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

基本等值式

8. 零律 $A \vee 1 \Leftrightarrow 1$，$A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
9. 同一律 $A \vee 0 \Leftrightarrow A$．$A \wedge 1 \Leftrightarrow A$
10. 排中律 $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$
11. 矛盾律 $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$
12. 蕴涵等值式 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
13. 等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
14. 假言易位 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
15. 等价否定等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$
16. 归谬论 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

特别提示：必须牢记这16组等值式，这是继续学习的基础

等值演算与置换规则

1. 等值演算——由已知的等值式推演出新的等值式的过程

2. 置换规则

设 $\Phi(A)$ 是含公式 A 的命题公式，$\Phi(B)$ 是用公式 B 置换 $\Phi(A)$ 中所有的 A 后得到的命题公式。

$$若\ B \Leftrightarrow A，则\ \Phi(B) \Leftrightarrow \Phi(A)$$

等值演算的用途

1. 证明两个公式等值

例2： 证明 $p\to(q\to r) \Leftrightarrow (p\wedge q)\to r$

等值演算的应用举例

2. 证明两个公式不等值

例3： 证明 $p\to(q\to r)$ 与 $(p\to q)\to r$ 不等值

判断公式类型

3. 判断公式类型:

A为矛盾式当且仅当$A \Leftrightarrow 0$

A为重言式当且仅当$A \Leftrightarrow 1$

例4: 用等值演算法判断下列公式的类型

(1) $q\wedge\neg(p\rightarrow q)$

(2) $(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$

(3) $((p\wedge q)\vee(p\wedge\neg q))\wedge r)$

综合实例

例5：（综合实例） 在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人进行判断如下：

甲：王教授不是苏州人，是上海人；

乙：王教授不是上海人，是苏州人；

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听完3人的判断后，王教授笑着说，你们3人中有1人说得全对，有1人说对了一半，另一人说得全不对．试用逻辑演算分析王教授到底是哪里人。

小结

1. **等值式**：等价式$A\leftrightarrow B$是重言式，记作$A\Leftrightarrow B$
2. **基本等值式**
3. **置换规则、等值演算**
4. **等值演算的用途**

   验证两个公式等值、不等值;

   判断公式类型;

   作实际综合例子的推理