

2021/11/16 星期一 17:00

V : vector space (向量线性空间).
 V 是一个集合. $V = \dots$
 R : 数域.

$\forall \alpha, \beta \in V, \alpha \oplus \beta \in V$ 运算封闭
 $\forall \lambda \in R, \forall \alpha \in V, \lambda \cdot \alpha \in V$

例1: $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$, \mathbb{R} 为系数域
 \oplus : 平常的加法运算
 \vdash 证明: 运算的封闭性

设 $\alpha, \beta, \gamma \in V; \lambda, \mu \in R$
 (1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;
 (2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;
 (3) 在 V 中存在零元素 0 , 对任何 $\alpha \in V$, 都有 $\alpha + 0 = \alpha$;
 (4) 对任何 $\alpha \in V$, 都有 α 的负元素 $\beta \in V$, 使 $\alpha + \beta = 0$;
 (5) $1\alpha = \alpha$;
 (6) $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$;
 (7) $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;
 (8) $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$.

例2: $V = \mathbb{R}^n$ 中
 \vdash 证明: $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$
 \vdash 例3: $V = \{X | AX = b\}$, A, b 是常数
 \vdash 例4: 非齐次方程的解

分析: $\forall \alpha, \beta \in V, A\alpha = b$
 且 $A\beta = b \therefore A(\alpha \oplus \beta) = A\alpha + A\beta = 2b \neq b$. 即 $\alpha \oplus \beta \notin V$
 $\therefore \oplus$ 不是一个封闭运算

取普通加法和数乘

例1: $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $0 = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\forall \alpha \in V, \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 取 $\beta = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

$\alpha \oplus \beta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = 0$

$\therefore \beta$ 是 α 的负元. 记 $\beta = -\alpha$

$V \oplus (-V)$ 相当于 V 生成 α ($V \oplus \alpha$)

"-" 还没有定义

利用加法和数乘逐步推倒更多的结论

例2: 证明 $\forall \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$
 $-\alpha = \begin{pmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$

求证: 若 V 是线性空间, 则
 负元唯一.

证明: $\forall \alpha \in V$, 设 β, γ 均为其负元. $\alpha \oplus \beta = 0 = \alpha \oplus \gamma$

$(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = 0 \oplus \gamma = \gamma$
 $(\alpha \oplus \gamma) \oplus \beta = 0 \oplus \beta = \beta$

$\gamma = \beta$
 即 α 的负元 $-\alpha$ 是唯一的.

再证: 0 是唯一的

$0_1 \oplus 0_2 = 0_1 = 0_2 = 0$

\therefore 唯一.

再证: 0 是唯一的

证明: 设 $0_1, 0_2$ 均为零元

三、真题讲解

(2020数学一):

设 A 为2阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(1)证明 P 为可逆矩阵;

(2)若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$,求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

向量, 知 $k_1 = 0$ 。因此 $k_1 = k_2 = 0$, 即 $\alpha, A\alpha$ 线性无关, 所以矩阵 P 可逆。

(2) 因为 $A^2\alpha = 6\alpha - A\alpha$, 所以

$$AP = A(\alpha, A\alpha) = (A\alpha, A^2\alpha) = (A\alpha, 6\alpha - A\alpha)$$

$$= (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

记 $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, 有 $AP = PB$, 由 P 可逆, 知 $P^{-1}AP = B$, 即 A 和 B 相似, 且 $P^{-1}AP =$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

由 $|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 6 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+3)$ 知, 矩阵 B 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$, 从

而矩阵 A 的特征值也为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$, A 的两个特征值互不相等, 由定理 5.2 的推论 1 知, 矩阵 A 可对角化。

三、真题讲解

(2020数学一):

若矩阵 A 经过初等列变换化成矩阵 B , 则

(A)存在矩阵 P , 使得 $PA = B$

(B)存在矩阵 P , 使得 $BP = A$

(C)存在矩阵 P , 使得 $PB = A$

(D)方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

解(2): $AP = A(\alpha, A\alpha)$
 $= (A\alpha, A^2\alpha) \quad (\because A^2\alpha = -A\alpha + 6\alpha)$
 $= (A\alpha, -A\alpha + 6\alpha)$
 $(\alpha, A\alpha \text{ 是 } \mathbb{R}^2 \text{ 中的一组基})$ 反证法
 $(\alpha, A\alpha \text{ 线性无关, 任何二维向量可由其})$
 $= (\alpha, A\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
 $\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
 下同(1)

$$-\lambda\alpha + \lambda\alpha$$

线性空间

线性空间的定义

线性空间的子空间

小结

说明

1. 凡满足以上八条规律的加法及数乘运算，称为线性运算。
2. 向量空间中的向量不一定是有序数组。
3. 判别线性空间的方法：一个集合，对于定义的加法和数乘运算不封闭，或者运算不满足八条性质的任一条，则此集合就不能构成线性空间。

线性空间的定义

线性空间是线性代数最基本的概念之一，也是一个抽象的概念，它是向量空间概念的推广。

线性空间是为了解决实际问题而引入的，它是某一类事物从量的方面的一个抽象，即把实际问题看作向量空间，进而通过研究向量空间来解决实际问题。

线性空间的判定方法

- (1) 一个集合，如果定义的加法和数乘运算是通常的实数间的加乘运算，则只需检验对运算的封闭性。

通常意义下的加法与数乘 8 条运算规律显然满足

例 实数域上的全体 $m \times n$ 矩阵，对矩阵的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间，记作 $R^{m \times n}$ 。

$$\because A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n}, \quad \lambda A_{m \times n} = D_{m \times n},$$

$\therefore R^{m \times n}$ 是一个线性空间。

定义

设 V 是一个非空集合， R 为实数域。如果对于任意两个元素 $\alpha, \beta \in V$ ，总有唯一的一个元素 $\gamma \in V$ 与之对应，称为 α 与 β 的和，记作

$$\gamma = \alpha + \beta$$

若对于任一数 $\lambda \in R$ 与任一元素 $\alpha \in V$ ，总有唯一的一个元素 $\delta \in V$ 与之对应，称为 λ 与 α 的数乘，记作

$$\delta = \lambda \alpha$$

如果上述的两种运算满足以下八条运算规律，那么 V 就称为数域 R 上的向量空间（或线性空间），其中的元素也称为向量。

例 次数不超过 n 的多项式的全体，记作 $P[x]_n$ ，即

$$P[x]_n = \{p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \dots, a_1, a_0 \in R\}$$

对于通常的多项式的加法，数与多项式的乘法构成的数乘运算构成线性空间。

通常的多项式加法、数乘多项式的乘法两种运算满足线性运算规律。

$$\begin{aligned} & (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &= (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \in P[x]_n \end{aligned}$$

$$\lambda(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)$$

$$= (\lambda a_n) x^n + \cdots + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0) \in P[x]_n$$

$P[x]_n$ 对运算封闭

设 $\alpha, \beta, \gamma \in V; \lambda, \mu \in R$

$$(1) \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

$$(2) (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

(3) 在 V 中存在零元素 0 ，对任何 $\alpha \in V$ ，都有

$$\alpha + 0 = \alpha;$$

(4) 对任何 $\alpha \in V$ ，都有 α 的负元素 $\beta \in V$ ，使

$$\alpha + \beta = 0;$$

$$(5) 1\alpha = \alpha;$$

$$(6) \lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha;$$

$$(7) (\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha;$$

$$(8) \lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta.$$

不一定是数字, 只是一个占位符

例 次数不超过 n 的多项式的全体, 记作 $P[x]_n$, 即 $P[x]_n = \{p = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \dots, a_1, a_0 \in R\}$

对于通常的多项式的加法, 数与多项式的乘法构成的数乘运算 构成线性空间。

通常的多项式加法、数乘多项式的乘法两种运算满足线性运算规律。

$$(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0) = (a_n + b_n) x^n + \dots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \in P[x]_n$$

$$\lambda(a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = (\lambda a_n) x^n + \dots + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0) \in P[x]_n$$

$P[x]_n$ 对运算封闭

7

(2) 不能构成 R 上的一个线性空间。

事实上, 设 X_1, X_2 都是 n 元非齐次线性方程组 $AX = B$ 的解向量, 则

$$AX_1 = B, \quad AX_2 = B$$

但 $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = B + B = 2B \neq B$

即 $X_1 + X_2$ 不是 $AX = B$ 的解向量, 也就是说所有解向量的集合对加法运算 不封闭。

因此不能构成一个线性空间。

11

例 n 次多项式的全体, 即 $\{p = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \dots, a_1, a_0 \in R, a_n \neq 0\}$

对于通常的多项式的加法, 数与多项式的乘法构成的数乘运算 不构成线性空间。

$$0p = 0x^n + \dots + 0x + 0 \notin Q[x]_n$$

$Q[x]_n$ 对运算不封闭。

例 在区间 $[a, b]$ 上全体连续函数, 对函数的加法与数和函数的数量乘法, 构成实数域上的线性空间。

8

注意: 一个集合, 如果定义的加法和乘数运算不是通常的实数间的加乘运算, 则必需检验是否满足八条线性运算规律。

例* 正实数的全体, 记作 R^+ , 在其中定义加法及数乘运算为

$$a \oplus b = ab, \quad \lambda \circ a = a^\lambda, (\lambda \in R, a, b \in R^+)$$

验证 R^+ 对上述加法与乘数运算构成线性空间。

证明 $\forall a, b \in R^+, \Rightarrow a \oplus b = ab \in R^+$;

$$\forall \lambda \in R, a \in R^+, \Rightarrow \lambda \circ a = a^\lambda \in R^+.$$

所以对定义的加法与数乘运算封闭

12

例 正弦函数的集合

$$S[x] = \{s = A \sin(x + B) \mid A, B \in R\}.$$

对于通常的函数加法及数乘函数的乘法构成线性空间。

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= A_1 \sin(x + B_1) + A_2 \sin(x + B_2) \\ &= (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos x + b_2 \sin x) \\ &= (a_1 + a_2) \cos x + (b_1 + b_2) \sin x \\ &= A \sin(x + B) \in S[x]. \end{aligned}$$

$$\lambda s_1 = \lambda A_1 \sin(x + B_1) = (\lambda A_1) \sin(x + B_1) \in S[x]$$

$\therefore S[x]$ 是一个线性空间。

9

下面一一验证八条线性运算规律:

- $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$;
- $(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = (abc) = a \oplus (b \oplus c)$;
- R^+ 中存在零元素 1, 对任何 $a \in R^+$, 有 $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$;
- $\forall a \in R^+$, 有负元素 $a^{-1} \in R^+$, 使 $a \oplus a^{-1} = a \cdot a^{-1} = 1$;

13

思考:

(1) 以实矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组 $AX=0$ 的解向量的全体所组成的集合是否构成线性空间?

(2) 以实矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 为系数矩阵的非齐次线性方程 $AX=b$ 的解向量的全体所组成的集合是否构成线性空间?

10

- $1 \circ a = a^1 = a$;
- $\lambda \circ (\mu \circ a) = \lambda \circ a^\mu = (a^\mu)^\lambda = a^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \circ a$;
- $(\lambda + \mu) \circ a = a^{\lambda+\mu} = a^\lambda a^\mu = a^\lambda \circ a^\mu = \lambda \circ a \oplus \mu \circ a$;
- $\lambda \circ (a \oplus b) = \lambda \circ (ab) = (ab)^\lambda = a^\lambda b^\lambda = a^\lambda \oplus b^\lambda = \lambda \circ a \oplus \lambda \circ b$.

所以 R^+ 对所定义的运算构成线性空间。

14

例: n 个有序实数组成的数组的全体

$$S^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

对于通常的有序数组的加法及如下定义的数乘

$$\lambda \circ (x_1, \dots, x_n)^T = (0, \dots, 0)$$

不构成线性空间。

S^n 对运算封闭。

但 $1 \circ x = 0$, 不满足第五条运算规律。

由于所定义的运算不是线性运算, 所以 S^n 不是线性空间。

15

(2) 因 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_2$, 即 W_2 非空。

对任意

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix} \in W_2$$

有

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0, \quad a_2 + b_2 + c_2 = 0,$$

于是

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

满足

$$(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2) = 0,$$

$$\text{即 } A + B \in W_2,$$

19

线性空间的性质

(1) 零元素唯一

(2) 负元素唯一

(3) $0\alpha = 0$; $(-1)\alpha = -\alpha$; $\lambda 0 = 0$

(4) 如果 $\lambda\alpha = 0$, 则 $\lambda = 0$ 或 $\alpha = 0$

16

对任意 $k \in \mathbb{R}$ 有

$$kA = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 & 0 \\ 0 & 0 & kc_1 \end{pmatrix}$$

并且

$$ka_1 + kb_1 + kc_1 = 0,$$

即 $kA \in W_2$, 故 W_2 是 $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 的子空间。



20

线性空间的子空间

定义 设 V 是一个线性空间, L 是 V 的一个非空子集, 如果 L 对于 V 中所定义的加法和数乘两种运算也构成一个线性空间, 则称 L 为 V 的 **子空间**。

定理 线性空间 V 的非空子集 L 构成子空间的充分必要条件是: L 对于 V 中的线性运算封闭。

17

小结:

线性空间是二维、三维几何空间及 n 维向量空间的推广, 它在理论上具有高度的概括性。

线性空间的元素统称为“向量”, 但它可以是通常的向量, 也可以是矩阵、多项式、函数等。

线性空间 $\left\{ \begin{array}{l} \text{是一个集合} \\ \text{对所定义的加法及数乘运算封闭} \\ \text{所定义的加法及数乘符合线性运算} \end{array} \right.$

如同 n 维向量一样, 我们可讨论向量的线性相关性等概念。

21

例 $\mathbb{R}^{2 \times 3}$ 的下列子集是否构成子空间? 为什么?

$$(1) W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \mid b, c, d \in \mathbb{R} \right\};$$

$$(2) W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a + b + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

解 (1) 不构成子空间。 因为对

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1$$

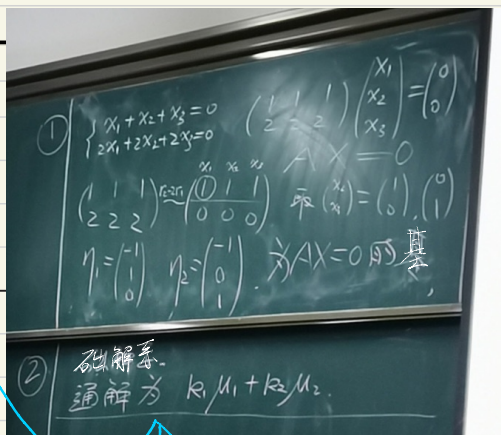
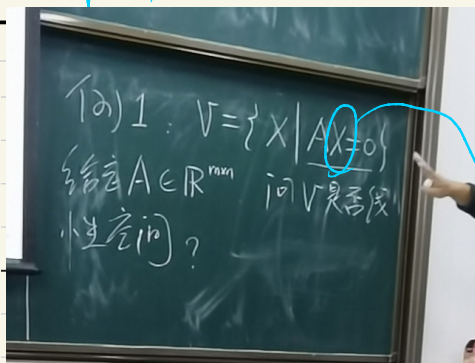
有

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W_1,$$

即 W_1 对矩阵加法不封闭, 不构成子空间。

18

P17



第3次课 (11月22日)

三、真题讲解

(2019数学二):

已知向量组

(I) $\alpha_1 = (1, 1, 4)^T, \alpha_2 = (1, 0, 4)^T, \alpha_3 = (1, 2, a^2 + 3)^T$

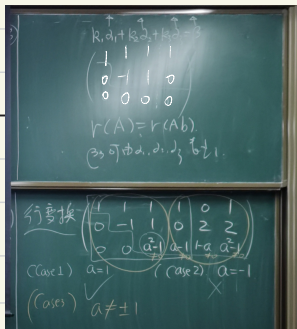
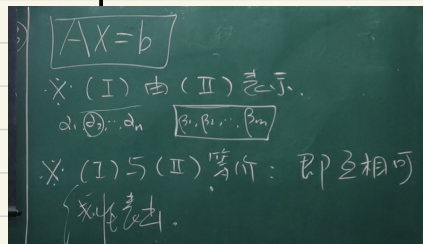
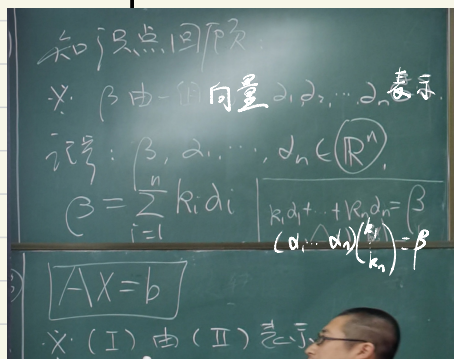
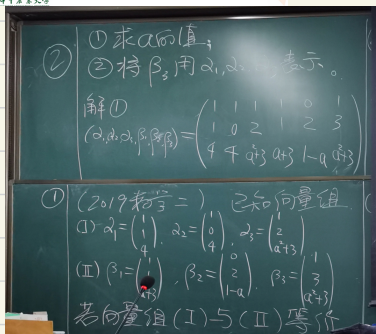
(II) $\beta_1 = (1, 1, a + 3)^T, \beta_2 = (0, 2, 1 - a)^T, \beta_3 = (1, 3, a^2 + 3)^T$

若向量组 (I) 与向量组 (II) 等价

(1) 求 a 的值;

(2) 将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示.

等价必须秩相等



线性空间

线性空间的基与维数

元素在给定基下的坐标

元素在给定基下的坐标

定义2 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是线性空间 V_n 的一个基, 对于任一元素 $\alpha \in V_n$, 总有且仅有一组有序数 x_1, x_2, \dots, x_n , 使

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n,$$

有序数组 x_1, x_2, \dots, x_n 称为元素 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 这个基下的坐标, 并记作 $\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

22

线性空间的基与维数

已知: 在 R^n 中, 线性无关的向量组最多由 n 个向量组成, 而任意 $n+1$ 个向量都是线性相关的.

问题: 在一般的线性空间 V 中, 最多能有多少线性无关的向量?

23

向量的线性相关性定义

对于向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 若存在不全为零的数

$$k_1, k_2, \dots, k_n$$

使 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = 0$, 成立

则称向量组线性相关, 否则称线性无关.

可看出: 线性相关性定义与 n 维向量的线性相关性定义并无区别, 所以有关线性运算的其他定义, 比如线性表示, 向量组的等价性等概念都与 n 维向量相应定义雷同.

24

定义1 在线性空间 V 中, 如果存在 n 个元素

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

满足: (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关;

(2) V 中任一元素 α 总可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示,

那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 称为线性空间 V 的一个基, n 称为线性空间的维数.

维数为 n 的线性空间称为 n 维线性空间, 记作 V_n .

当一个线性空间 V 中存在任意多个线性无关的向量时, 就称 V 是无限维的.

注: (1) 基不唯一
(2) 基所含的元素的个数唯一 (维数)
(3) 不同的基之间是等价价

25

可能出填空题

例 在任意不超过四次的多项式的线性空间 $P[x]$ 中,

$$P_1 = 1, P_2 = x, P_3 = x^2, P_4 = x^3, P_5 = x^4$$

就是它的一个基

任意不超过四次的多项式

$$P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

可表示为

$$P = a_0P_1 + a_1P_2 + a_2P_3 + a_3P_4 + a_4P_5$$

因此 P 在这个基下的坐标为

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T$$

26

$$\text{若取另一基 } q_1 = 1, q_2 = 1+x, q_3 = 2x^2, q_4 = x^3, q_5 = x^4, \text{ 则}$$

$$P = (a_0 - a_1)q_1 + a_1q_2 + \frac{1}{2}a_2q_3 + a_3q_4 + a_4q_5$$

因此 P 在这个基下的坐标为

$$(a_0 - a_1, a_1, \frac{1}{2}a_2, a_3, a_4)^T$$

注意: 线性空间 V 的任意元素在不同的基下所对应的坐标一般不同, 一个元素在一个基下对应的坐标是唯一的

27

例

在任意不超过 $n-1$ 次的多项式的线性空间 $P[x]_{n-1}$ 中,

$$\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = (x-a), \epsilon_3 = (x-a)^2, \dots, \epsilon_n = (x-a)^{n-1}$$

是一个基

则由泰勒公式知

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

因此 $f(x)$ 在基 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots, \epsilon_n$ 下的坐标是

$$(f(a), f'(a), \frac{f''(a)}{2!}, \dots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!})^T$$

$P[x]_{n-1}$ 是一个 n 维向量空间

28

一般方法:

答案, 也是一个结论

再证: $V = P[X]_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

分解: $\forall \alpha \in P[X]_2$
 $\alpha = a_0 + a_1x + a_2x^2$
 $= a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

基: $1, x, x^2$

$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot x + k_3 \cdot x^2 = 0$
 $= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = 0$
 $\therefore 1, x, x^2$ 是 $P[X]_2$ 的一组基
 线性无关

多项式矩阵, 第二组基

怎么找到第2个基

① 观点1: 基不是惟一的.

\mathbb{R}^3 (I) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 是 \mathbb{R}^3 的基

(II) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = 1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

② $\alpha_2 = \dots = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $\alpha_3 = \dots = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(I) 到 (II) 的过渡矩阵

再证: $V = P[X]_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

分解: (I) $V_1 = 1, V_2 = x, V_3 = x^2$

(II) $\alpha_1 = ?, \alpha_2 = ?, \alpha_3 = ?$

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (V_1, V_2, V_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1+x, \alpha_3 = 1+x+x^2$

定义1 在线性空间 V 中, 如果存在 n 个元素

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

满足:

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关;
- (2) V 中任一元素 α 总可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性表示,

那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 称为线性空间 V 的一个基,
 n 称为线性空间的维数

维数为 n 的线性空间称为 n 维线性空间, 记作 V_n .

当一个线性空间 V 中存在任意多个线性无关的向量时, 就称 V 是无限维的。

- 注: (1) 基不唯一
 (2) 基所含的元素的个数唯一 (维数)
 (3) 不同的基之间是等价类

25

三、真题讲解

(2019数学一)

若 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$ 则为基

设向量组 $\alpha_1 = (1, 2, 1)^T, \alpha_2 = (1, 3, 2)^T, \alpha_3 = (1, a, 3)^T$
 为 \mathbb{R}^3 的一组基, $\beta = (1, 1, 1)^T$ 在这个基下的坐标
 为 $(b, c, 1)$

(1) 求 a, b, c 的值;

(2) 证明 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为 \mathbb{R}^3 的一组基, 并求 α_2, α_3 ,
 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵。



华中农业大学

解 (1) 由已知得 $b\alpha_1 + c\alpha_2 + \alpha_3 = \beta$, 即

$$\begin{cases} b+c+1=1, \\ 2b+3c+a=1, \\ b+2c+3=1, \end{cases}$$

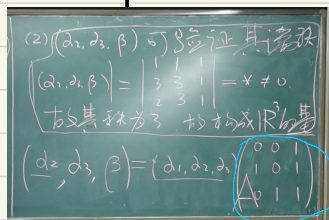
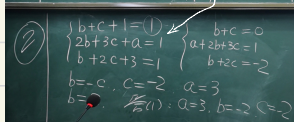
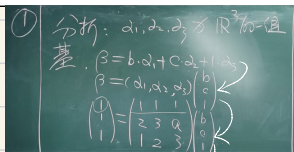
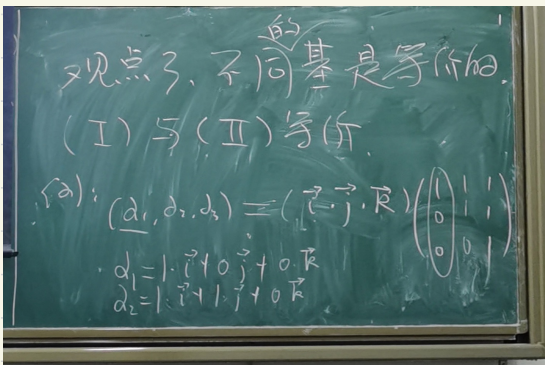
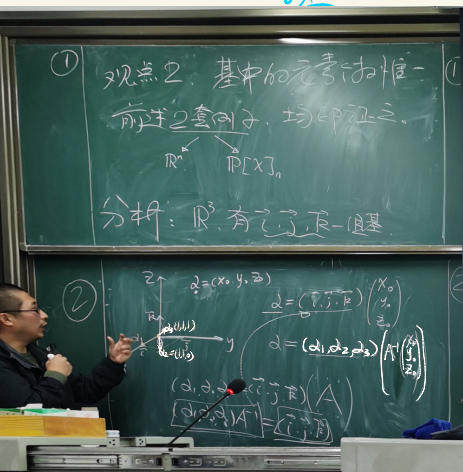
解得 $a=3, b=2, c=-2$.

(2) 因为 $|\alpha_2, \alpha_3, \beta| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, 所以 $\alpha_2, \alpha_3, \beta$ 为 \mathbb{R}^3 的一个基.

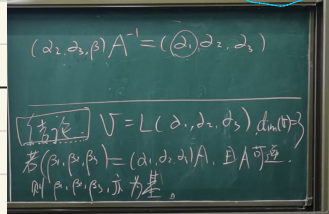
即考虑秩, 即验证其是满秩

由 (1) 知 $\beta = 2\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_1$, 所以 $\alpha_1 = 2\alpha_2 - 2\alpha_3 + \beta$.

从而 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_2, \alpha_3, \beta) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 为所求过渡矩阵.



好像错了



定义 1 在线性空间 V 中, 如果存在 n 个元素

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

满足:

- (1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关;
- (2) V 中任一元素 α 总可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性

表示,

那么 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 称为线性空间 V 的一个基,

n 称为线性空间的维数

维数为 n 的线性空间称为 n 维线性空间, 记作 V_n .

当一个线性空间 V 中存在任意多个线性无关的向量时, 就称 V 是无限维的.

- 注:
- (1) 基不唯一
 - (2) 基所含的元素的个数唯一 (维数)
 - (3) 不同的基之间是等价的

25

① \mathbb{R}^3 $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

(I) $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

(II) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$= (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(III) $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ $\xrightarrow{\text{线性无关}}$

$= (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) A (A^{-1})$

$P[X]_2$ $\dim(P[X]_2) = 3$

(I) $1, x, x^2$

(II) $1, 1+x, 1+x+x^2$

$= (1, x, x^2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

② Dimension = ∞ ?

问: \mathbb{R}^n $P[X]_n$ \mathbb{R}^{∞}

分析: $P[X] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m \mid m \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}\}$

基: x, x^2, \dots

例 所有二阶实矩阵组成的集合 V , 对于矩阵的加法和数量乘法, 构成实数域 R 上的一个线性空间. 对于 V 中的矩阵

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

为一组基

当然应该验证其满足基的要求

30

线性空间的同构

定义: 设 U, V 是两个线性空间, 如果它们的元素之间有一一对应关系, 且这个对应关系保持线性组合的对应, 则称线性空间 U 与 V 同构。

注: 同维数的线性空间必同构。

31

因

$$k_1 E_{11} + k_2 E_{12} + k_3 E_{21} + k_4 E_{22} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix}$$

所以

$$k_1 E_{11} + k_2 E_{12} + k_3 E_{21} + k_4 E_{22} = 0$$

$$\iff k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0,$$

即 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 线性无关.

对于任意矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V,$$

$$A = a_{11} E_{11} + a_{12} E_{12} + a_{21} E_{21} + a_{22} E_{22}$$

因此 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 为 V 的一组基

而 A 在这组基下的坐标为 $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})^T$

31

例 设 $W_1 = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K^n \mid a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0\}$
求上述线性空间的基, 维数.

即基础解系

例 齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系与其解集构成线性子空间的基, 维数是什么关系?

例 求下列齐次线性方程组解空间的一组基、与解空间的维数 (也作为习题)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

32

习题: 设

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

A^* 是伴随阵, 则齐次线性方程组 $A^*X=0$ 解空间的基是什么?

33

$$AX=0. \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 - \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 = 2x_4 - \frac{1}{2}x_5 \end{cases} \quad \text{取 } \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{1} \quad \eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{再取 } \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{类似地, } \eta_3 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\{ \eta_1, \eta_2, \eta_3 \} \mid AX=0, \quad X = k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + k_3 \eta_3$$

$$\textcircled{2} \quad \text{故 } \eta_1, \eta_2, \eta_3 \text{ 为解空间的}$$

$$\text{一组基!}$$

$$d_{\text{lin}}(U) = 3$$

$$AX=0 \text{ 基础解系 } n-(n-r) \text{ 个}$$

11月29日

作业1解答

P220 习题2并解.

T1. 线性空间的判定

(1) $V_1 = \{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11} + a_{12} = 0 \}$ 对矩阵加法

证明: (证-) Step 0. 验证运算的封闭性.

(证) $\forall A, B \in V_1, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a_{11} + a_{12} = 0, b_{11} + b_{12} = 0$

$A+B = (a_{11}+b_{11}, a_{12}+b_{12})$ $(A+B)_{11} + (A+B)_{12} = a_{11}+b_{11} + a_{12}+b_{12} = (a_{11}+a_{12}) + (b_{11}+b_{12}) = 0+0 = 0$ \checkmark $\Rightarrow A+B \in V_1$

$\forall k \in \mathbb{R}, \forall A \in V_1$ 此处的 $kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (kA)_{11} + (kA)_{12} = k(a_{11}+a_{12}) = k \cdot 0 = 0$ 故 $kA \in V_1$

需要证明故以对线性运算是封闭的

因为是矩阵的加法，所以可以直接用结合律吗？如果是 \mathbb{Q} 呢？

Step-1. $\forall A, B \in V_1, A+B=B+A$ 成立

Step-2. $\forall A, B, C \in V_1$ 和 $(A+B)+C = A+(B+C)$ 成立

Step-3. 取 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall A \in V_1, O+A=A$ 即零元

Step-4. $\forall A \in V_1, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \exists B = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V_1$

$A+B=O, \therefore B=-A$ 即负元存在

Step-5. $\forall A \in V_1, 1 \cdot A = A$

Step-6. $\forall k, l \in \mathbb{R}, \forall A \in V_1, (kl)A = k(lA)$

以前线代课证明过，所以这里显然，只需提一下

Step-7. $\forall k, l \in \mathbb{R}, A \in V_1, (k+l)A = kA + lA$

Step-8. $\forall k \in \mathbb{R}, A, B \in V_1, k(A+B) = kA + kB$

故 V_1 关于定义的线性运算构成线性空间。

(证-) $V_1 \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2}$ (所有 2×2 的实矩阵)

$\mathbb{R}^{2 \times 2}$ 关于矩阵的加法和乘积构成线性空间。

则只需证明 V_1 的运算封闭性。

P220 习题2并解.

T1. 线性空间的判定

(1) $V_1 = \{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11} + a_{12} = 0 \}$ 对矩阵加法

(分析) \Rightarrow 同构的观点看 V_1

$V_2 = \{ \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \mid a_1 + a_2 = 0 \}$ $V_2 = \{ \alpha \mid A\alpha = 0 \}$

实际上是齐次线性方程组的解

$V_1 \subseteq \mathbb{R}^{2 \times 2} = L \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ $V_2 \subseteq \mathbb{R}^4 = L \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$\forall A \in V_1, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\forall \alpha \in V_2, \alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$

$A = a_{11} E_{11} + a_{12} E_{12} + a_{21} E_{21} + a_{22} E_{22}$

$V_1 \cong V_2$

同构

期末不会出关于同构的很难的题

再例: $V = \mathbb{R}^+$ $a \oplus b = ab$ $k \cdot a = a^k$
 问: $V(\oplus, \cdot)$ 是否构成线性空间?
 证: (1) Step-0. $\forall a, b \in V = \mathbb{R}^+$, $a \oplus b = ab \in \mathbb{R}^+$, $\forall k \in \mathbb{R}$
 $\forall a \in V$, $k \cdot a = a^k \in \mathbb{R}^+$ \therefore 封闭性
 Step-1. $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$
 Step-2. 结合律: Step-3. 0 存在, 且 $0 = 1$ ($\because a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$)

证封闭的实质是证明加法和数乘后, 结果还是属于 V , 即封闭性

Step-4. $\forall a \in V = \mathbb{R}^+$, $\exists b = \frac{1}{a}$
 $a \oplus b = a \oplus \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a} = 1 = 0$, $\therefore b = -a$
 Step-5. $1 \cdot a = a^1 = a$ \checkmark Step-6~8 (略)

(2) $V_2 = \{A | A \in \mathbb{R}^{n \times n}, A^T = -A\}$, 对矩阵的加法和数乘运算:

(证法) (i) $V_2 \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$, V_2 是所有反对称矩阵的集合
 (ii) $n=3$, $A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$
 $\forall A, B \in V_2$, $A^T = -A$, $B^T = -B$
 由 $A^T = (A+B)^T = A^T + B^T = -(A+B)$, $\therefore A+B$ 是反对称矩阵
 $\forall \lambda A \in V_2$, \therefore 加法封闭, 数乘封闭

证法 (i), (ii), 知 V_2 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的线性子空间.
 再问: 上述 V_2 的维数? 求其一组基
 ($n=3$ 的情况)

解: 维数, 3
 其中一组基: $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
 $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(ii) 再证 M_1, M_2, M_3 线性无关.
 ② $k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 讨论 k_1, k_2, k_3 仅有零解

$k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & k_3 \\ k_1 & 0 & k_3 \\ -k_2 & -k_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\therefore k_1, k_2, k_3$ 均为 0
 故 M_1, M_2, M_3 构成 V_2 的一组基
 记成 $V_2 = L(M_1, M_2, M_3)$, 且 $\dim(V_2) = 3$

$V_2 = \mathbb{R}^+$ $a \oplus b = a \cdot b$, $k \cdot a = a^k$, 问: 基?
 解: $\forall a \in V_2$, $a = x \cdot 2 = 2^x$ ($x = \log_2 a$)
 故 2 为 V_2 的一组基
 $\dim(V_2) = 1$

$V_1 = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, a_{11} + a_{12} = 0\}$ 求基
 $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
 (i) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $A = a M_1 + b M_2 + c M_3$
 (ii) $k_1 M_1 + k_2 M_2 + k_3 M_3 = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_2 & -k_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow k_1 = k_2 = 0$, $\therefore M_1, M_2, M_3$ 线性无关
 由 (i), (ii), M_1, M_2, M_3 为 V_1 的一组基
 且 $\dim(V_1) = 3$

蒋运做错了, 是英豪哥做出来的哦

通用解法: 方程组 : $x_1 + x_4 = 0$
 $x_2 = 0$
 $x_3 = 0$

12月1日

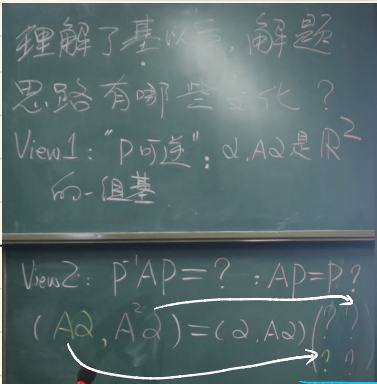
三、真题讲解

(2020数学一):

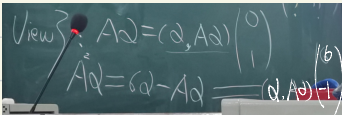
设 A 为2阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

(1)证明 P 为可逆矩阵;

(2)若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.



坐标



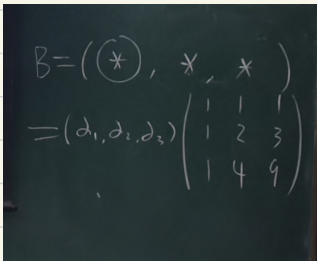
三、真题讲解

(2005数学一):

设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为3维列向量, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,
 $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$,

如果 $|A| = 1$, 则 $|B| = (\quad)$.

线性无关, A 为 R^3 的一组基, 故 B 可用 A 表示



12月6日

14. 设 T 是 \mathbb{R}^3 中的线性变换,

$$T([1, 3]^T) = [5, -1]^T, \quad T([2, -1]^T) = [3, -2]^T, \quad T([1, 1]^T) = [0, 0]^T$$

求 T 在自然基 (e_1, e_2) 下的矩阵.

$V \rightarrow V$ V -值基 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$
 $\alpha \mapsto \alpha$
 $\varepsilon_i \mapsto \alpha \varepsilon_i = \alpha \varepsilon_1 + \alpha \varepsilon_2 + \dots + \alpha \varepsilon_n = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix}$
 $(\alpha \varepsilon_1, \dots, \alpha \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) A$
 A 称为 α 在基 $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ 下的矩阵.

p220. T14-T15 (此二题为例证) (7分) 周=文

T14. 设 T 是 \mathbb{R}^2 中的线性变换.

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

求 T 在自然基 e_1, e_2 下的矩阵.

解: 设 $T(e_1, e_2) = (e_1, e_2) T$, 下求 T .

设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
 $T(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
 $T(e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
 $T(e_1, e_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$
 注意矩阵 T

15. T 是 \mathbb{R}^3 上的线性变换, $T([x, y, z]^T) = [2x+y, x-y, 3z]^T$.

(1) 求 T 在自然基 $(e_1 = [1, 0, 0]^T, e_2 = [0, 1, 0]^T, e_3 = [0, 0, 1]^T)$ 下的矩阵;

(2) 求 T 在基 $(e_1 = [1, 0, 0]^T, e_2 = [1, 1, 0]^T, e_3 = [0, 1, 1]^T)$ 下的矩阵.

答案的形式没变

T15. T 是 \mathbb{R}^3 上的线性变换. $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \\ 3z \end{pmatrix}$
 (1) 求 T 在自然基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵
 (2) 求 T 在基 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵.
 解(1) $T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e_1 = e_1 = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 右列矩阵 B 是基 (e_1, e_2, e_3) 到基 (e_1, e_2, e_3) 的过渡矩阵.

$T(e_1, e_2, e_3) B = (e_1, e_2, e_3) B A$
 $T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) B A B^{-1} = (e_1, e_2, e_3) T$
 $\therefore A = B^{-1} T B$ 为所求!

T15. T 是 \mathbb{R}^3 上的线性变换. $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-y \\ 3z \end{pmatrix}$
 (1) 求 T 在自然基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵
 (2) 求 T 在基 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵.
 解(1) $T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$e_1 = e_1 = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $T(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $T(e_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $T(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $T(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

三、真题讲解

(2017数学一):

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关

的3维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为 ().



线性变换的几关注:
Note 1: 在大部分情况下, λ 是作用在 \mathbb{R}^n 上
 $\forall X \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\lambda X = AX$
例如: $T_0: \alpha = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \alpha = T_0 \alpha$

我们也是用这样的方式去定义特征值
特征向量 X 的?
 $AX = \lambda X$
Note 2: 何时为 0 外? —— 当作手头的表格
不是 \mathbb{R}^n 中的向量, 例如 $\sin x$

$f(x), f_2(x), f_3(x) \in C[a, b]$
 $f(x) = \sin x, f_2(x) = \cos x, f_3(x) = \sin 2x$
Note 3: 沿着特征向量的方向去想...
 $X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0, AX = \lambda X \leftarrow (\lambda E - A)X = 0$

A 为对称矩阵, 永存在 n 个线性无关的特征向量
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ 是 \mathbb{R}^n 的一组基
 $(AX) = \lambda X, A\alpha_i = \lambda_i \alpha_i, \checkmark$
 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n = L(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
 $\forall \beta \in \mathbb{R}^n, \beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
 $\beta = A\beta = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
 $= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 b_1 \\ \lambda_2 b_2 \\ \lambda_3 b_3 \end{pmatrix}$
 $= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
 $A\beta$ 相当于 β 在各个坐标轴上的拉伸

矩阵 A 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示 \mathbb{R}^n
Note 4: 在坐标轴上,
是通用语言: AX 表示
类型: $ANNN$
 $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

矩阵 A 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 表示 \mathbb{R}^n
Note 4: 在坐标轴上, 对 $X \in \mathbb{R}^n$ 施加 A 变换
 AX 相当于 X 的线性变换

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 是 \mathbb{R}^3 的一组基
 $(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = A \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$
 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (e_1, e_2, e_3) B$
 $(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = A(e_1, e_2, e_3) B$

$\therefore r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = r(A(e_1, e_2, e_3)B)$
 $= r(A)$

三、真题讲解

(2018数学三):

设 A 为三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关向量组.

若 $A\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, A\alpha_2 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_3$

则 $|A| = ()$.

$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 为 \mathbb{R}^3 的一组基
 $(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1}, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

线性空间的同构

定义：设U, V是两个线性空间，如果它们的元素之间有一一对应关系，且这个对应关系保持线性组合的对应，则称线性空间U与V同构。

注：同维数的线性空间必同构。

坐标变换公式

定理1 设 V_n 中的元素 α 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标为

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T.$$

在基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 下的坐标为

$$(x_1', x_2', \dots, x_n')^T.$$

若两个基满足关系式

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P$$

则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

基变换与坐标变换

问题：在 n 维线性空间 V 中，任意 n 个线性无关的向量都可以作为 V 的一组基。对于不同的基，同一个向量的坐标是不同的。

那么，同一个向量在不同的基下的坐标有什么关系呢？换句话说，随着基的改变，向量的坐标如何改变呢？

证明

因 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P$

所以 $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ 由于 P 是可逆的 $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 及 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是线性空间 V_n 的两个基,且有

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \dots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \dots + p_{n2}\alpha_n \\ \vdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \dots + p_{nn}\alpha_n \end{cases}$$

称此公式为基变换公式。

矩阵表示

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

记作 P

第2列是 β_2 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标,
第 j 列是 β_j 在 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的坐标,

例 在 $\mathbb{P}[x]_4$ 中取两个基

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= x^3 + 2x^2 - x & \beta_1 &= 2x^3 + x^2 + 1 \\ \alpha_2 &= x^3 - x^2 + x + 1 & \beta_2 &= x^2 + 2x + 2 \\ \alpha_3 &= -x^3 + 2x^2 + x + 1 & \beta_3 &= -2x^3 + x^2 + x + 2 \\ \alpha_4 &= -x^3 - x^2 + 1 & \beta_4 &= x^3 + 3x^2 + x + 2 \end{aligned}$$

求坐标变换公式

解 利用一组最基本的基 $x^3, x^2, x, 1$ 过渡

因为 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (x^3, x^2, x, 1)A$,

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (x^3, x^2, x, 1)B,$$

40

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P$$

基变换公式

在基变换公式

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)P$$

中,矩阵 P 称为由基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的过渡矩阵。

为什么?

过渡矩阵 P 是可逆的。

由于 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 的线性无关性

37

$$\text{其中 } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

得 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)A^{-1}B$.

故坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = B^{-1}A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

41

用初等变换计算 $B^{-1}A$.

$$(B | A) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

初等行变换

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right)$$



例 坐标变换的几何意义, 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

为线性空间的两个基

又设 $\alpha = -\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2$, 则 α 在基 α_1, α_2 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) = (E | B^{-1}A)$$

所以

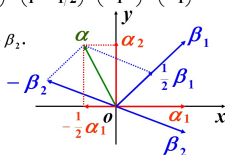
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$



由坐标变换公式可知, α 在基 β_1, β_2 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

即 $\alpha = \frac{1}{2}\beta_1 - \beta_2$.



例

所有的二阶实上三角矩阵构成的实线性空间中下列两组向量

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

三维线性空间

1. 证明两组向量都是基

2. 求过渡矩阵

3. 求矩阵 $\eta = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ 在两组基下的坐标

44

易验证 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 线性无关, 并且

$$(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

该矩阵记为P

易计算 $|P| \neq 0$ 所以 η_1, η_2, η_3 也线性无关。

因而 (1) 得证, 并且过渡矩阵为P.

$$\eta = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = 2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{因而坐标分别为} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

45