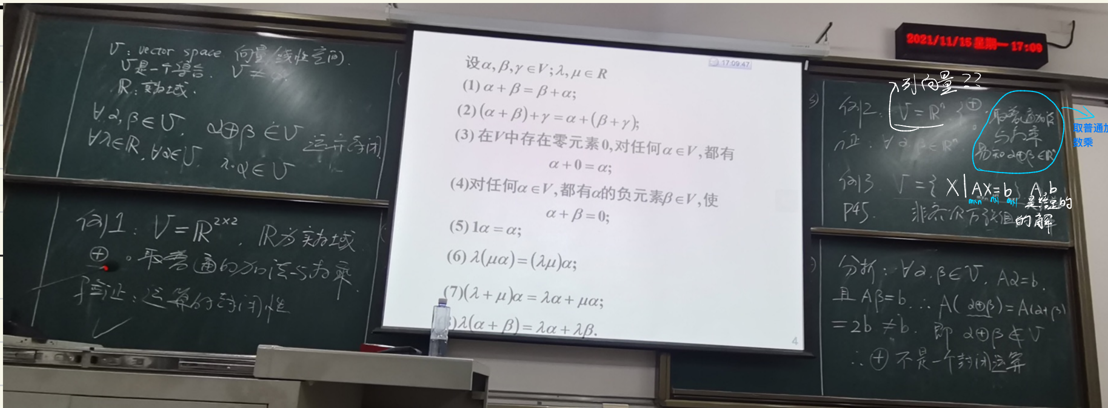
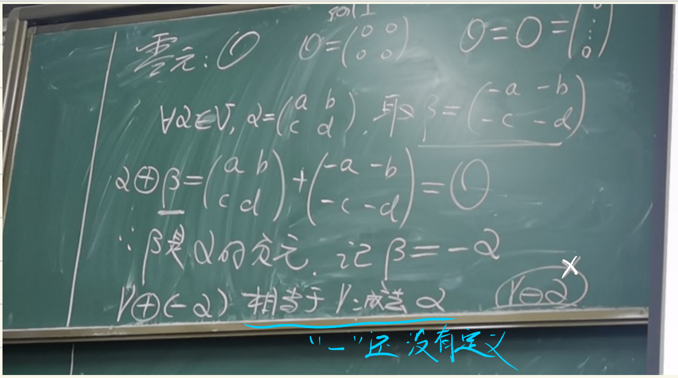
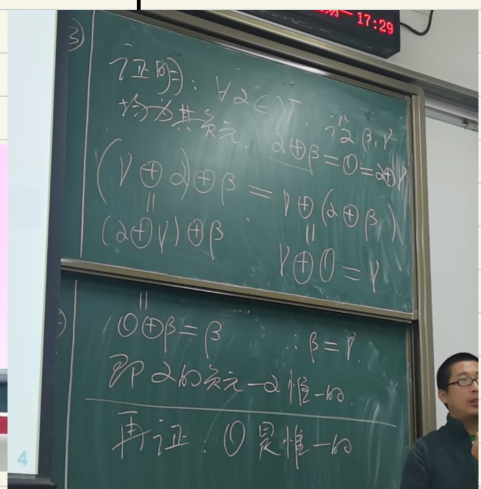
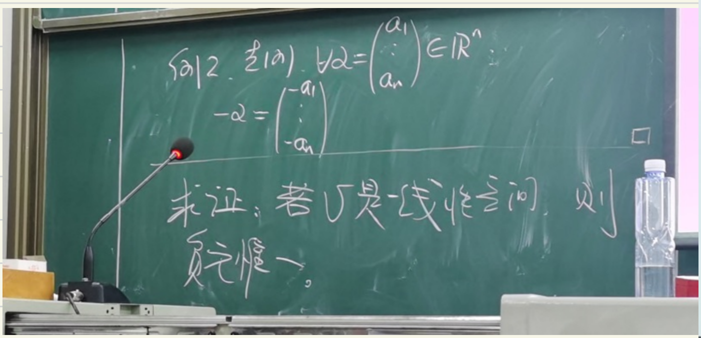


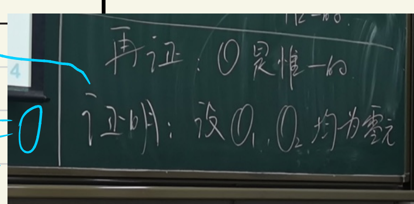

取普通加法和数乘

利用加法和数乘逐步推倒更多的结论




$0_1 \oplus 0_2 = 0_1 = 0_2 = 0$

∴ 唯1.

## 三、真题讲解

**（2020数学一）：**

设$A$为2阶矩阵，$P=(\alpha, A\alpha)$，其中$\alpha$是非零向量且不是$A$的特征向量.

(1)证明$P$为可逆矩阵；

(2)若$A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$,求$P^{-1}AP$，并判断$A$是否相似于对角矩阵.

向量，知 $k_1=0$。因此 $k_1=k_2=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha}$ 线性无关，所以矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可逆。

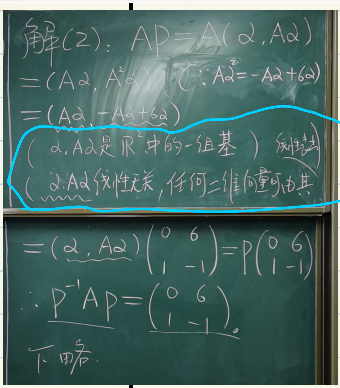
(2) 因为 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha}$，所以

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha}, \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A\alpha}, 6\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{A\alpha})$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A\alpha})\begin{pmatrix}0 & 6\\1 & -1\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0 & 6\\1 & -1\end{pmatrix},$$

记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 6\\1 & -1\end{pmatrix}$，有 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PB}$，由 $\boldsymbol{P}$ 可逆，知 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，且 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 6\\1 & -1\end{pmatrix}$。

由 $|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}-\lambda & 6\\1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)$ 知，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=2, \lambda_2=-3$，从而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值也为 $\lambda_1=2, \lambda_2=-3$，$\boldsymbol{A}$ 的两个特征值互不相等，由定理 5.2 的推论 1 知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化。




## 三、真题讲解

**（2020数学一）：**

若矩阵$A$经过初等列变换化成矩阵$B$，则

(A)存在矩阵$P$，使得$PA=B$

(B)存在矩阵$P$，使得$BP=A$

(C)存在矩阵$P$，使得$PB=A$

(D)方程组$Ax=0$与$Bx=0$同解

$-1\alpha \oplus \lambda\alpha$

# 线 性 空 间





## 线性空间的定义

线性空间是线性代数最基本的概念之一，也是一个抽象的概念，它是向量空间概念的推广．

线性空间是为了解决实际问题而引入的，它是某一类事物从量的方面的一个抽象，即把实际问题看作向量空间，进而通过研究向量空间来解决实际问题．



**定义**

设 V 是一个非空集合，R 为实数域．如果对于任意两个元素 $\alpha$, $\beta \in$ V，总有唯一的一个元素 $\gamma \in$ V 与之对应，称为 $\alpha$ 与 $\beta$ 的和，记作

$$\gamma = \alpha + \beta$$

若对于任一数 $\lambda \in$ R 与任一元素 $\alpha \in$ V，总有唯一的一个元素 $\delta \in$ V 与之对应，称为 $\lambda$ 与 $\alpha$ 的数乘，记作

$$\delta = \lambda\alpha$$

如果上述的两种运算满足以下八条运算规律，那么 $V$ 就称为数域 $R$ 上的向量空间（或线性空间），其中的元素也称为向量。



设 $\alpha, \beta, \gamma \in V; \lambda, \mu \in R$

(1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(3) 在 $V$ 中存在零元素 0，对任何 $\alpha \in V$，都有

$$\alpha + 0 = \alpha;$$

(4) 对任何 $\alpha \in V$，都有 $\alpha$ 的负元素 $\beta \in V$，使

$$\alpha + \beta = 0;$$

(5) $1\alpha = \alpha$;

(6) $\lambda(\mu\alpha) = (\lambda\mu)\alpha$;

(7) $(\lambda + \mu)\alpha = \lambda\alpha + \mu\alpha$;

(8) $\lambda(\alpha + \beta) = \lambda\alpha + \lambda\beta$.



说明

1．凡满足以上八条规律的加法及数乘运算，称为线性运算.

2．向量空间中的向量不一定是有序数组.

3．判别线性空间的方法：一个集合，对于定义的加法和数乘运算不封闭，或者运算不满足八条性质的任一条，则此集合就不能构成线性空间.



线性空间的判定方法

(1) 一个集合，如果定义的加法和数乘运算是通常的实数间的加乘运算，则只需检验对运算的封闭性.

通常意义下的加法与数乘 8 条运算规律显然满足

例 实数域上的全体 $m \times n$ 矩阵，对矩阵的加法和数乘运算构成实数域上的线性空间，记作 $R^{m\times n}$.

$$\because A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}, \quad \lambda A_{m\times n} = D_{m\times n},$$

$$\therefore R^{m\times n} \text{是一个线性空间．}$$



例 次数不超过n 的多项式的全体，记作 $P[x]_n$，即

$$P[x]_n = \{ p = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_n, \cdots, a_1, a_0 \in R \}$$

对于通常的多项式的加法，数与多项式的乘法构成的数乘运算 构成线性空间。

通常的多项式加法、数乘多项式的乘法两种运算满足线性运算规律.

$$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0)$$
$$= (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \in P[x]_n$$
$$\lambda(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)$$
$$= (\lambda a_n) x^n + \cdots + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0) \in P[x]_n$$

$P[x]_n$ 对运算封闭

把集合描述基础，两个运算描述清楚，再验证封闭性与八条运算

例 次数不超过n 的多项式的全体，记作 $P[x]_n$，即

不一定是数字，只是一个占位符

$$P[x]_n=\{p=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\,|a_n,\cdots,a_1,a_0\in R\}$$

对于通常的多项式的加法，数与多项式的乘法构成的数乘运算 构成线性空间。

通常的多项式加法、数乘多项式的乘法两种运算满足线性运算规律.

$$(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)+(b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0)$$
$$=(a_n+b_n)x^n+\cdots+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0)\in P[x]_n$$
$$\lambda(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)$$
$$=(\lambda a_n)x^n+\cdots+(\lambda a_1)x+(\lambda a_0)\in P[x]_n$$

$P[x]_n$ 对运算封闭



例 n次多项式的全体，即

$$\{p=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\,|a_n,\cdots,a_1,a_0\in R,a_n\neq 0\}$$

对于通常的多项式的加法，数与多项式的乘法构成的数乘运算 不构成线性空间。

$$0p=0x^n+\cdots+0x+0\notin Q[x]_n$$

$Q[x]_n$ 对运算不封闭.

例 在区间 $[a,b]$ 上全体实连续函数，对函数的加法与数和函数的数量乘法，构成实数域上的线性空间.



例 正弦函数的集合 略

$$S[x]=\{s=A\sin(x+B)|A,B\in R\}.$$

对于通常的函数加法及数乘函数的乘法构成线性空间.

$$\because s_1+s_2=A_1\sin(x+B_1)+A_2\sin(x+B_2)$$
$$=(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos x+b_2\sin x)$$
$$=(a_1+a_2)\cos x+(b_1+b_2)\sin x$$
$$=A\sin(x+B)\in S[x].$$
$$\lambda s_1=\lambda A_1\sin(x+B_1)=(\lambda A_1)\sin(x+B_1)\in S[x]$$

$\therefore S[x]$ 是一个线性空间.



思考：

（1）以实矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组AX=0的解向量的全体所组成的集合是否构成线性空间 ？

（2） 以实矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 为系数矩阵的非齐次线性方程AX=b 的解向量的全体所组成的集合是否构成线性空间?



（2） 不能构成 $R$ 上的一个线性空间．

事实上,设 $X_1,X_2$ 都是 $n$ 元非齐次线性方程组 $AX=B$ 的解向量,则

$$AX_1=B,\qquad AX_2=B$$

但 $A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=B+B=2B\neq B$

即 $X_1+X_2$ 不是 $AX=B$ 的解向量,也就是说所有解向量的集合对加法运算 不封闭.

因此不能构成一个线性 空间.



注意：一个集合，如果定义的加法和乘数运算不是通常的实数间的加乘运算，则必需检验是否满足八条线性运算规律.

例* 正实数的全体，记作 $R^+$，在其中定义加法及数乘运算为

$$a\oplus b=ab,\quad \lambda\circ a=a^\lambda,(\lambda\in R,a,b\in R^+).$$

验证 $R^+$ 对上述加法与乘数运算构成线性空间.

证明 $\forall a,b\in R^+,\Rightarrow a\oplus b=ab\in R^+;$

$\forall\lambda\in R,a\in R^+,\Rightarrow\lambda\circ a=a^\lambda\in R^+.$

所以对定义的加法与数乘运算封闭.



下面一一验证八条线性运算规律：

(1) $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a;$

(2) $(a\oplus b)\oplus c=(ab)\oplus c=(ab)c=a\oplus(b\oplus c);$

(3) $R^+$ 中存在零元素1,对任何 $a\in R^+$,有
$a\oplus 1=a\cdot 1=a;$

(4) $\forall a\in R^+$,有负元素 $a^{-1}\in R^+$,使
$a\oplus a^{-1}=a\cdot a^{-1}=1;$



(5) $1\circ a=a^1=a;$

(6) $\lambda\circ(\mu\circ a)=\lambda\circ a^\mu=(a^\mu)^\lambda=a^{\lambda\mu}=(\lambda\mu)\circ a;$

(7) $(\lambda+\mu)\circ a=a^{\lambda+\mu}=a^\lambda a^\mu=a^\lambda\oplus a^\mu$
$=\lambda\circ a\oplus\mu\circ a;$

(8) $\lambda\circ(a\oplus b)=\lambda\circ(ab)=(ab)^\lambda=a^\lambda b^\lambda$
$=a^\lambda\oplus b^\lambda=\lambda\circ a\oplus\lambda\circ b.$

所以 $R^+$ 对所定义的运算构成线性空间.

例： $n$ 个有序实数组成的数组的全体

$$S^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \mid x_1,x_2,\cdots,x_n\in R\}$$

对于通常的有序数组的加法及如下定义的数乘

$$\lambda\circ(x_1,\cdots,x_n)^T=(0,\cdots,0)$$

不构成线性空间.

$S^n$对运算封闭.

但$1\circ x=o$，不满足第五条运算规律.

由于所定义的运算不是线性运算,所以$S^n$不是线性空间.

15

## 线性空间的性质

（1） 零元素唯一

（2） 负元素唯一

（3）$0\alpha=0;\quad(-1)\alpha=-\alpha;\quad\lambda 0=0$

（4）如果 $\lambda\alpha=0$， 则 $\lambda=0$ 或 $\alpha=0$

16

## 线性空间的子空间

**定义** 设$V$是一个线性空间，$L$是$V$的一个非空子集，如果$L$对于$V$中所定义的加法和数乘两种运算也构成一个线性空间，则称$L$为$V$的子空间.

**定理** 线性空间$V$的非空子集$L$构成子空间的充分必要条件是：$L$对于$V$中的线性运算封闭.

17

例 $R^{2\times3}$的下列子集是否构成子 空间？为什么？

$$(1)\ W_1=\left\{\begin{pmatrix}1&b&0\\0&c&d\end{pmatrix}\middle|\, b,c,d\in R\right\};$$

$$(2)\ W_2=\left\{\begin{pmatrix}a&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}\middle|\, a+b+c=0,a,b,c\in R\right\}.$$

解 (1) 不构成子空间. 因为对

$$A=B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in W_1$$

有

$$A+B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\notin W_1,$$

即 $W_1$对矩阵加法不封闭，不构成子空间.

18

（2） 因$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\in W_2$，即$W_2$非空.

对任意

$$A=\begin{pmatrix}a_1&b_1&0\\0&0&c_1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}a_2&b_2&0\\0&0&c_2\end{pmatrix}\in W_2$$

有 $a_1+b_1+c_1=0,\quad a_2+b_2+c_2=0,$

于是 $$A+B=\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2&0\\0&0&c_1+c_2\end{pmatrix}$$

满足

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=0,$$

即 $A+B\in W_2,$

19

对任意$k\in R$有

$$kA=\begin{pmatrix}ka_1&kb_1&0\\0&0&kc_1\end{pmatrix}$$

并且 $ka_1+kb_1+kc_1=0,$

即 $kA\in W_2$， 故$W_2$是$R^{2\times3}$的子空间.

20

**小结：**

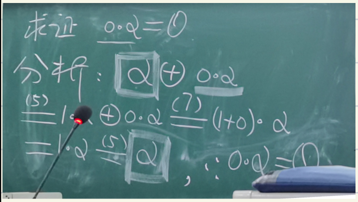
线性空间是二维、三维几何空间及$n$维向量空间的推广，它在理论上具有高度的概括性.

线性空间的元素统称为“向量”，但它可以是通常的向量，也可以是矩阵、多项式、函数等.

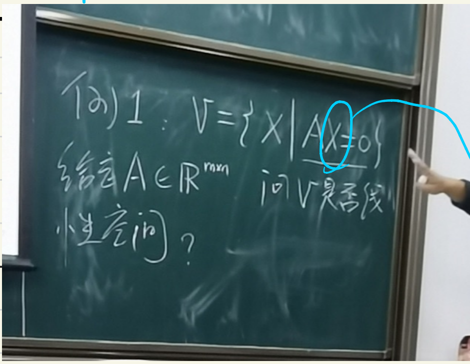
线性空间
- 是一个集合
- 对所定义的加法及数乘运算封闭
- 所定义的加法及数乘符合线性运算

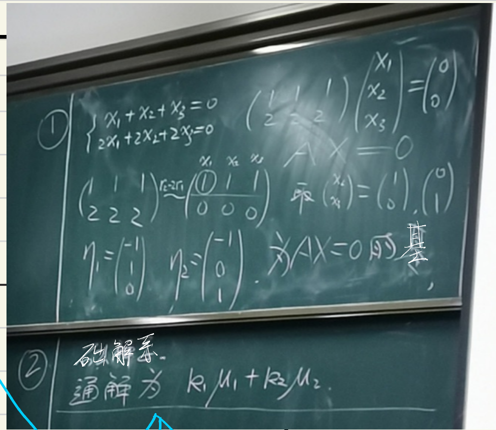
如同n维向量一样我们可讨论向量的线性相关性等概念

21

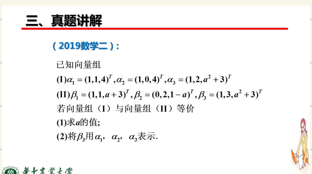


P17




# 第3次课（11月22日


三、真题讲解

（2019数学二）：

已知向量组

(I) $\alpha_1=(1,1,4)^T, \alpha_2=(1,0,4)^T, \alpha_3=(1,2,a^2+3)^T$

(II) $\beta_1=(1,1,a+3)^T, \beta_2=(0,2,1-a)^T, \beta_3=(1,3,a^2+3)^T$

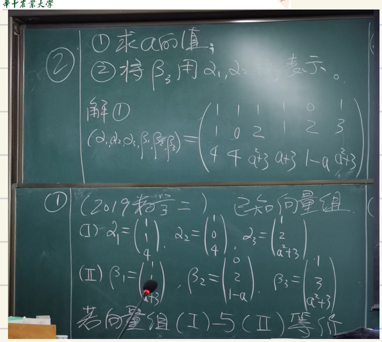
若向量组（I）与向量组（II）等价

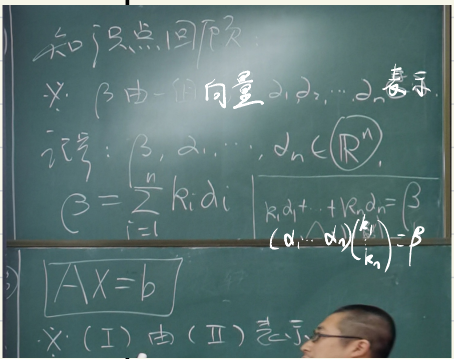
(1)求$a$的值;

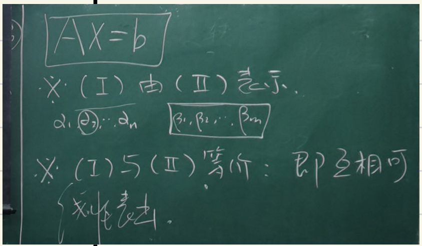
(2)将$\beta_3$用$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$表示.

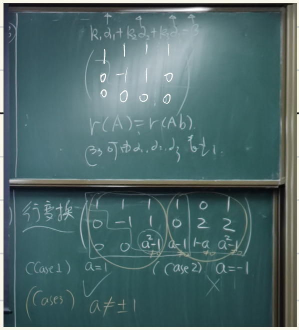
华中农业大学

等价必须秩相等



# 线性空间

线性空间的基与维数

元素在给定基下的坐标

22

## 线性空间的基与维数

已知：在$R^n$中，线性无关的向量组最多由 $n$ 个向量组成，而任意$n+1$个向量都是线性相关的.

问题：在一般的线性空间 V 中，最多能有多少线性无关的向量？

23

**向量的线性相关性定义**

对于向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 若存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$

使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$, 成立

则称向量组线性相关，否则成线性无关。

可看出：线性相关性定义与n维向量的线性相关性定义并无区别，所以有关线性运算的其他定义，比如线性表示，向量组的等价性等概念都与n维向量相应定义雷同。

24

定义 1 在线性空间$V$ 中，如果存在 $n$个元素

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$$

满足：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关；

(2) $V$中任一元素 $\alpha$总可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，

那么 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为线性空间V的一个基，n 称为线性空间的维数

维数为$n$的线性空间称为 $n$ 维线性空间，记作$V_n$.

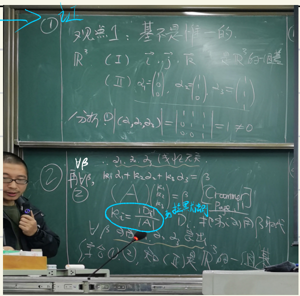
当一个线性空间$V$ 中存在任意多个线性无关的向量时，就称$V$ 是无限维的.

注：（1） 基不唯一

（2）基所含的元素的个数唯一（维数）

（3）不同的基之间是等价的

25




**元素在给定基下的坐标**

定义 2 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是线性空间$V_n$的一个基,对于任一元素$\alpha\in V_n$,总有且仅有一组有序数$x_1,x_2,\cdots,x_n$,使

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n,$$

有序数组$x_1,x_2,\cdots,x_n$称为元素$\alpha$在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$这个基下的坐标,并记作 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$.

26

例 **可能出填空题** 5维

在任意不超过四次的多项式的线性空间 $P[x]_4$中,

$$P_1=1,P_2=x,P_3=x^2,P_4=x^3,P_5=x^4$$

就是它的一个基

任意不超过四次的多项式

$$P=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$$

可表示为

$$p=a_0p_1+a_1p_2+a_2p_3+a_3p_4+a_4p_5$$

因此 $p$ 在这个基下的坐标为

$$(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)^T$$

27

若取另一基$q_1=1,q_2=1+x,q_3=2x^2,q_4=x^3,q_5=x^4$,则

$$p=(a_0-a_1)q_1+a_1q_2+\frac{1}{2}a_2q_3+a_3q_4+a_4q_5$$

因此 $p$ 在这个基下的坐标为

$$\left(a_0-a_1,a_1,\frac{1}{2}a_2,a_3,a_4\right)^T$$

注意：线性空间V的任意元素在不同的基下所对应的坐标一般不同，一个元素在一个基下对应的坐标是唯一的

28

例

在任意不超过n-1次的多项式的线性空间 $P[x]_{n-1}$中,

$$\varepsilon_1=1,\varepsilon_2=(x-a),\varepsilon_3=(x-a)^2,\cdots,\varepsilon_n=(x-a)^{n-1}$$ 是一个基

则由泰勒公式知

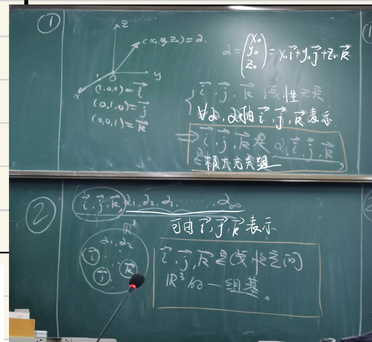
$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

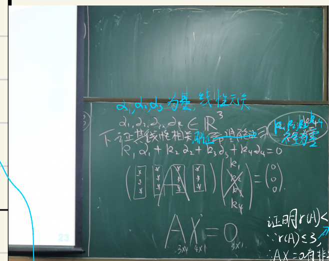
因此 $f(x)$在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标是

$$\left(f(a),f'(a),\frac{f''(a)}{2!},\cdots,\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right)^T.$$

$P[x]_{n-1}$ 是一个n维向量空间

29

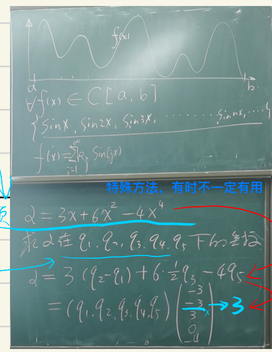




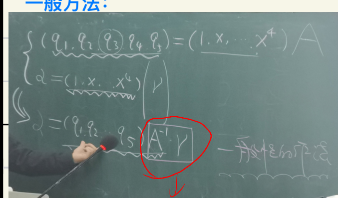
证明$r(A)<5$
$\because r(A)\le 3$,
$\therefore AX=0$有非零解
$\therefore \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关

特殊方法，有时不一定有用

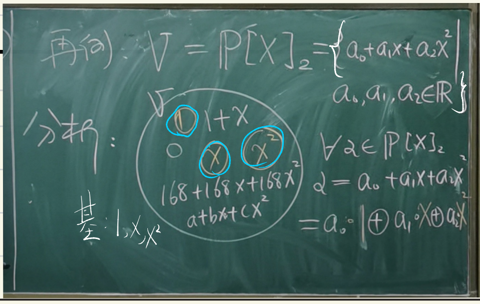
题

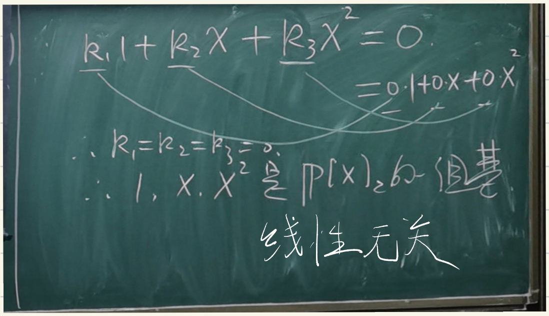


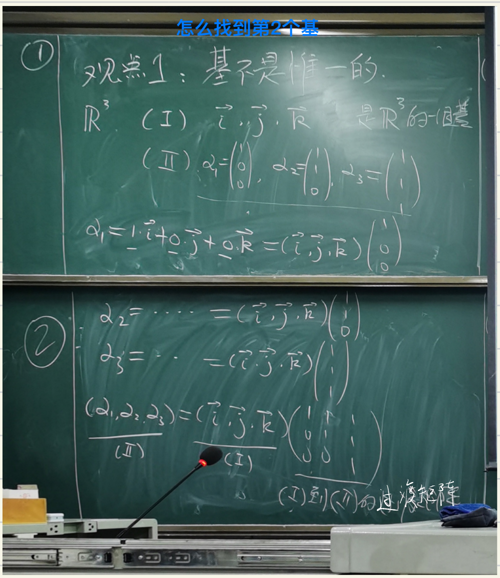
一般方法：



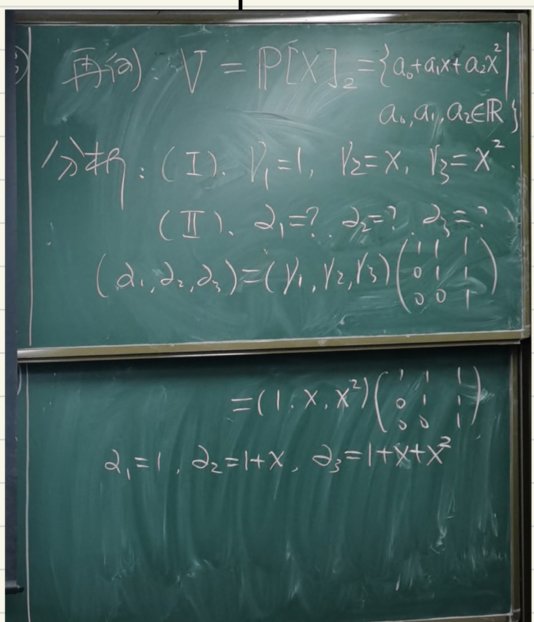
答案，也是一个结论


再例: V = P[X]₂ = {a₀+a₁x+a₂x² | a₀,a₁,a₂∈R}
分析:
1+x
0
168+168x+168x²
a+bx+cx²
∀α∈P[X]₂
α = a₀+a₁x+a₂x²
= a₀·1 ⊕ a₁·x ⊕ a₂x²
基: 1, x, x²


k₁1 + k₂x + k₃x² = 0
= 0·1+0·x+0·x²
∴ k₁=k₂=k₃=0
∴ 1, x, x² 是 P[x]₂ 的一组基
线性无关


怎么找到第2个基
① 观点1: 基不是唯一的
R³ (I) i, j, k 是R³的一组基
(II) α₁, α₂, α₃
α₁ = 1·i + 0·j + 0·k = (i, j, k)
② α₂ = ⋯ = (i, j, k)
α₃ = ⋯ = (i, j, k)
(α₁, α₂, α₃) = (i, j, k)
(II)
(I)
(I)到(II)的过渡矩阵

多项式矩阵，第二组基


再例: V = P[X]₂ = {a₀+a₁x+a₂x² | a₀,a₁,a₂∈R}
分析: (I). γ₁=1, γ₂=x, γ₃=x²
(II). α₁=? α₂=? α₃=?
(α₁, α₂, α₃) = (γ₁, γ₂, γ₃)
= (1, x, x²)
α₁=1, α₂=1+x, α₃=1+x+x²

定义 1　在线性空间$V$中，如果存在$n$个元素

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$$

满足：
(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关；
(2) $V$中任一元素$\alpha$总可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，

那么　$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为线性空间V的一个基，
n 称为线性空间的维数

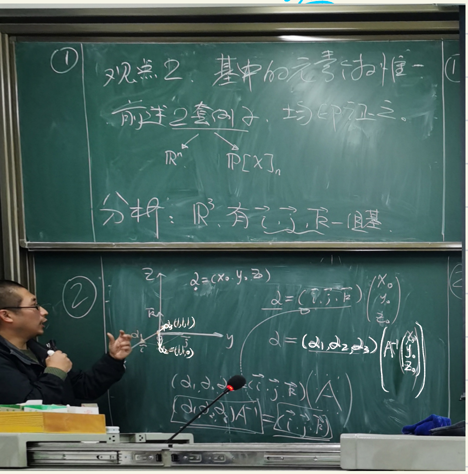
维数为$n$的线性空间称为$n$维线性空间，记作$V_n$.

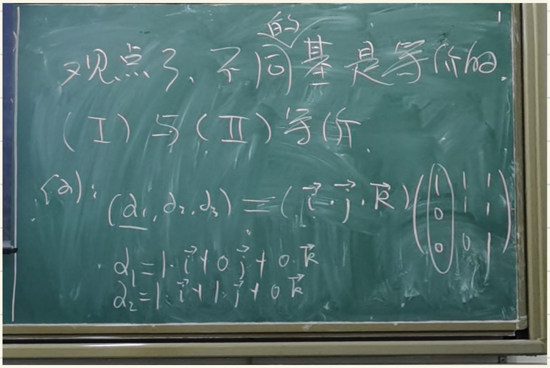
当一个线性空间$V$中存在任意多个线性无关的向量时，就称$V$是无限维的.

注：（1）基不唯一
（2）基所含的元素的个数唯一（维数）
（3）不同的基之间是等价的

25

证




## 三、真题讲解

行列式

（2019数学一）：若$|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|\neq 0$则为基

设向量组$\alpha_1=(1,2,1)^T,\alpha_2=(1,3,2)^T,\alpha_3=(1,a,3)^T$为$R^3$的一组基，$\beta=(1,1,1)^T$在这个基下的坐标为$(b,c,1)$

(1)求$a,b,c$的值；

(2)证明$\alpha_2,\alpha_3,\beta$为$R^3$的一组基，并求$\alpha_2,\alpha_3,\beta$到$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵.

华中农业大学

解　(1)由已知得$b\boldsymbol\alpha_1+c\boldsymbol\alpha_2+\boldsymbol\alpha_3=\boldsymbol\beta$，即

$$\begin{cases}b+c+1=1,\\2b+3c+a=1,\\b+2c+3=1,\end{cases}$$

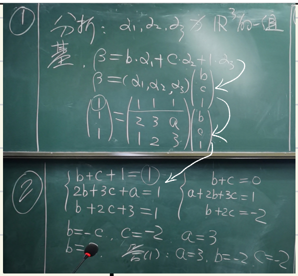
解得$a=3,b=2,c=-2$.

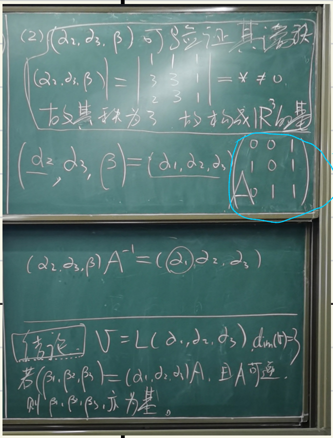
(2)因为$|\boldsymbol\alpha_2,\boldsymbol\alpha_3,\boldsymbol\beta|=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{vmatrix}=2\neq0$，所以$\boldsymbol\alpha_2,\boldsymbol\alpha_3,\boldsymbol\beta$为$\mathbf R^3$的一个基.

即考虑秩，即验证其是满秩

由(1)知$\boldsymbol\beta=2\boldsymbol\alpha_1-2\boldsymbol\alpha_2+\boldsymbol\alpha_3$，所以$\boldsymbol\alpha_1=\boldsymbol\alpha_2-\frac12\boldsymbol\alpha_3+\frac12\boldsymbol\beta$.

从而$(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\boldsymbol\alpha_3)=(\boldsymbol\alpha_2,\boldsymbol\alpha_3,\boldsymbol\beta)\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac12&0&1\\\frac12&0&0\end{pmatrix}$，故$\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac12&0&1\\\frac12&0&0\end{pmatrix}$为所求过渡矩阵.




好像错了

定义 1　在线性空间$V$中，如果存在 $n$个元素

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$$

满足：

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关；

(2) $V$中任一元素 $\alpha$总可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，

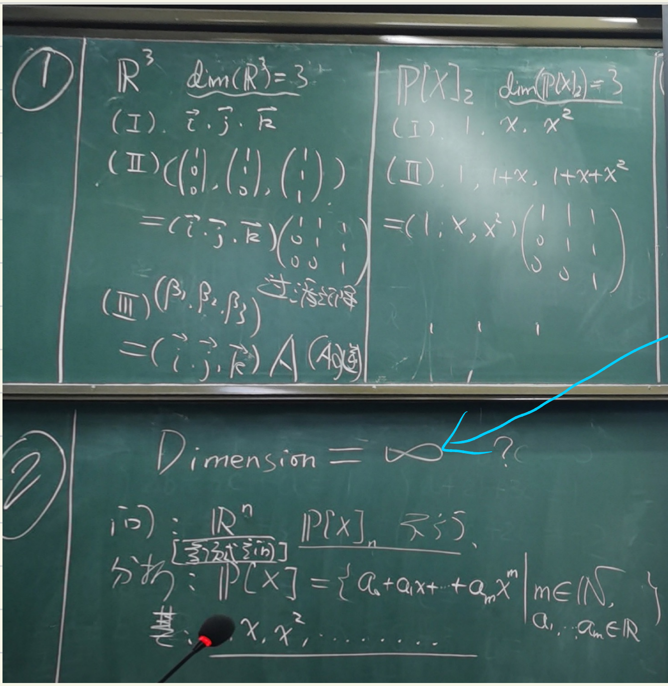
那么 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 称为线性空间V的一个基，
n 称为线性空间的维数

维数为$n$的线性空间称为 $n$ 维线性空间，记作$V_n$.

当一个线性空间$V$中存在任意多个线性无关的向量时，就称$V$是无限维的.

注：（1）基不唯一
（2）基所含的元素的个数唯一（维数）
（3）不同的基之间是等价的





**例** 所有二阶实矩阵组成的集合$V$，对于矩阵的加法和数量乘法，构成实数域$R$上的一个线性空间．对于$V$中的矩阵

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$
$$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

为一组基

当然应该验证其满足基的要求



## 线性空间的同构

**定义：**设U, V是两个线性空间，如果它们的元素之间有一一对应关系，且这个对应关系保持线性组合的对应，则称线性空间U与V同构。

注：同维数的线性空间必同构。



因
$$k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{21}+k_4E_{22}=\begin{pmatrix}k_1&k_2\\k_3&k_4\end{pmatrix}$$
所以 $k_1E_{11}+k_2E_{12}+k_3E_{21}+k_4E_{22}=0$

$\Longleftrightarrow k_1=k_2=k_3=k_3=0,$

即$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$线性无关.

对于任意矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in V,$

$$A=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22}$$

因此 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 为v的一组基

而A在这组基下的坐标为 $(a_{11},a_{12},a_{21},a_{22})^T$



例 设 $W_1=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in K^n \,|\, a_1+a_2+\cdots+a_n=0\}$

求上述线性空间的基，维数。

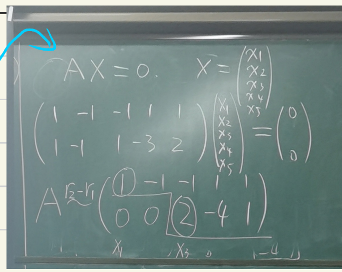
即基础解系

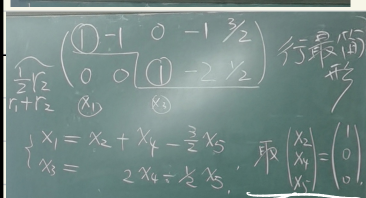
例 齐次线性方程组AX=0 的基础解系与其解集构成线性子空间的基、维数是什么关系？

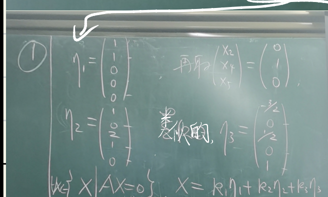
例 求下列齐次线性方程组解空间的一组基、与解空间的维数（也作为习题）

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4+x_5=0\\x_1-x_2+x_3-3x_4+2x_5=0\end{cases}$$





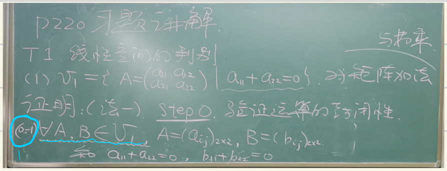


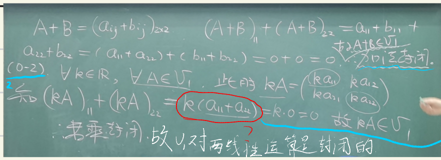
习题： 设 $A=\begin{pmatrix}-1&-2&3\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$

$A^*$ 是的伴随阵，则齐次线性方程组$A^*X=0$ 解空间的基是什么？

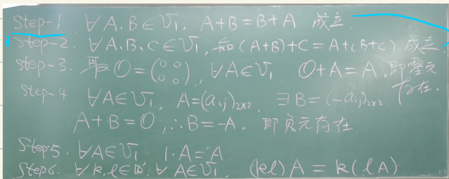
# 11月29日

## 作业1解答

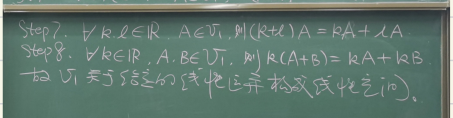


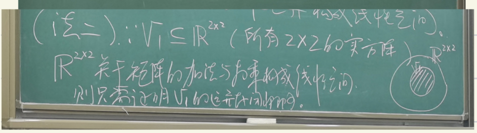



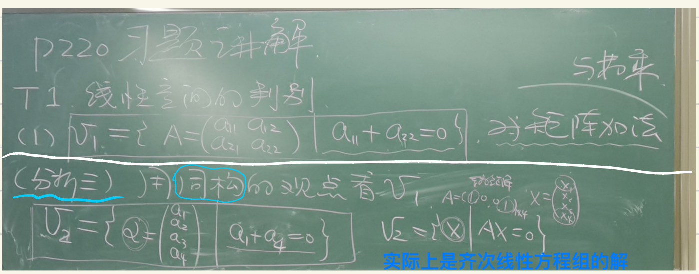

因为是矩阵的加法，所以可以直接用结合律吗?
如果是 ⊕ 呢?




以前线代课证明过，所以这里显然，只需提一下

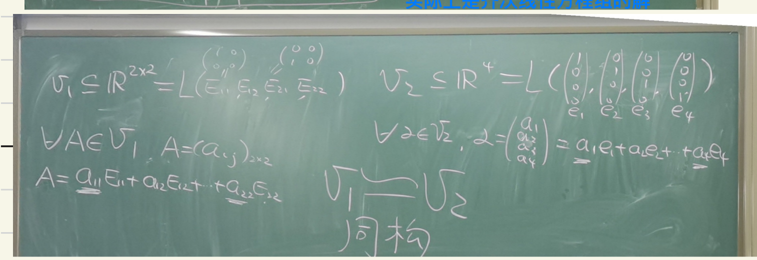



实际上是齐次线性方程组的解

期末不会出关于同构的很难的题



再例：$V=\mathbb{R}^+$　$a\oplus b=ab$　$k\cdot a=a^k$

问：$V(\oplus,\cdot)$ 是否构成线性空间？

证明：Step-0. $\forall a,b\in V=\mathbb{R}^+$，$a\oplus b=ab\in V$；$\forall k\in\mathbb{R}$，$\forall a\in V$，$k\cdot a=a^k\in\mathbb{R}^+$　∴运算封闭.

证封闭的实质是证明加法和数乘后，结果还是属于V，即封闭性

$1=\mathbb{0}$

Step-1. $a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$

Step-2. 结合律 O.K.　Step-3 $\mathbb{0}$存在，且$\mathbb{0}=1$（∵ $a\oplus 1=a\cdot 1=a$）

Step-4. $\forall a\in V=\mathbb{R}^+$，$\exists b=\frac{1}{a}$　∴负元存在

$a\oplus b=a\oplus\frac{1}{a}=a\cdot\frac{1}{a}=1=\mathbb{0}$　∴ $b=-a$

Step-5. $1\cdot a=a^1=a$ ✓　Step 6~8（略去）

(2) $V_2=\{A\mid A\in\mathbb{R}^{n\times n}, A^T=-A\}$，对矩阵的加法和数乘运算；

（证明）：(i) $V_2\subseteq\mathbb{R}^{n\times n}$，$V_2$是所有反对称矩阵的集合

例：$n=3$，$A=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ -a_{12} & 0 & a_{23}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0\end{pmatrix}$

(ii) $\forall A,B\in V_2$，$A^T=-A$，$B^T=-B$

此时 $(A+B)^T=A^T+B^T=-(A+B)$　∴$A+B$是反对称矩阵

即 $A+B\in V_2$　∴加法封闭，数乘同理封闭

综合(i),(ii)，知 $V_2$ 是 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 的线性子空间.

再问：上述$V_2$的维数$=$？求其一组基（$n=3$的情形）

解：维数：3

其中一组基：

$M_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$M_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$，$M_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$

(i) $A=\begin{pmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ -a_{12} & 0 & a_{23}\\ -a_{13} & -a_{23} & 0\end{pmatrix}=a_{12}M_1+a_{13}M_2+a_{23}M_3$

(ii) 再论证 $M_1,M_2,M_3$ 线性无关.

$k_1M_1+k_2M_2+k_3M_3=O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

论证 $k_1,k_2,k_3$ 仅有零解

$k_1M_1+k_2M_2+k_3M_3=\begin{pmatrix}0&k_1&k_2\\-k_1&0&k_3\\-k_2&-k_3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

∴ $k_1,k_2,k_3$ 均为0，故 $M_1,M_2,M_3$ 线性无关

综合(i)(ii)，$M_1,M_2,M_3$ 构成$V_2$的一组基

有几个自由的，基就有几个向量

记为 $V_2=L(M_1,M_2,M_3)$，且 $\dim(V_2)=3$

$V_3=\mathbb{R}^+$　$a\oplus b=a\cdot b$　$k\cdot a=a^k$　问：基？

解：$\forall a\in V_3$　$a=x\cdot 2=2^x$　$(x=\log_2 a)$

即 $a=(\log_2 a)\cdot 2$

故 2 为$V_3$的一组基　$\forall b(\neq 1=\mathbb{0})$

$\dim(V_3)=1$

$V_1=\{A\mid A\in\mathbb{R}^{2\times 2}, a_{11}+a_{22}=0\}$　求一组基

$M_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$　$M_2=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$　$M_3=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

蒋运做错了哦，是英豪哥做出来的哦

(i) $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}$，$A=aM_1+bM_3+cM_2$

(ii) $k_1M_1+k_2M_2+k_3M_3=\begin{pmatrix}k_1&k_3\\k_2&-k_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow k_1=k_2=k_3=0$.　∴ $M_1,M_2,M_3$ 线性无关

综合(i)(ii)，$M_1,M_2,M_3$为$V_1$的一组基

且 $\dim(V_1)=3$

通用解法：方程组：

$x_1+x_4=0$

$x_2=0$

$x_3=0$

# 12月1日

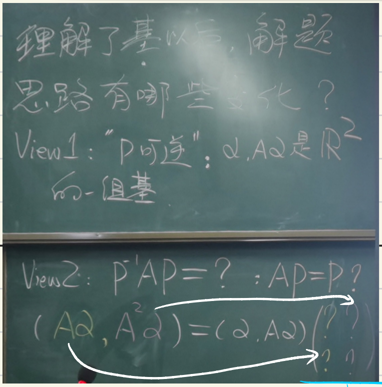
## 三、真题讲解

**（2020数学一）：**

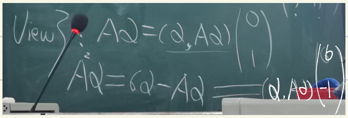
设$A$为2阶矩阵，$P=(\alpha,A\alpha)$，其中$\alpha$是非零向量且不是$A$的特征向量.

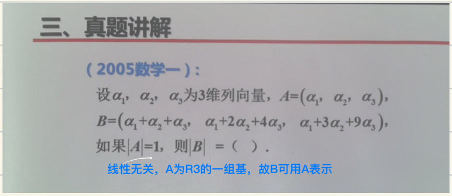
(1)证明$P$为可逆矩阵；

(2)若$A^2\alpha+A\alpha-6\alpha=0$,求$P^{-1}AP$，并判断$A$是否相似于对角矩阵.




坐标



## 三、真题讲解

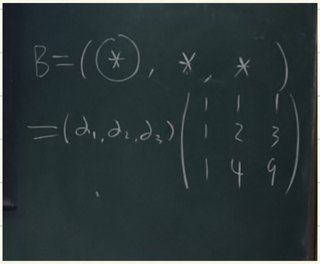
**（2005数学一）：**

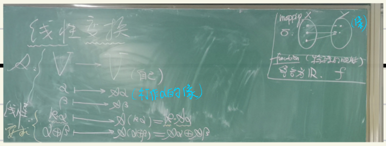
设$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$为3维列向量，$A=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，

$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$，

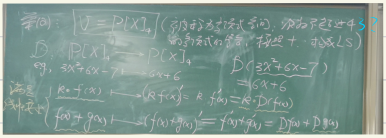
如果$|A|=1$，则$|B|$ =（ ）.

线性无关，A为R3的一组基，故B可用A表示

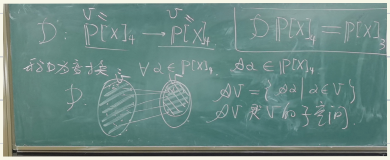




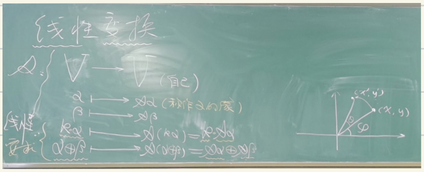
线性变换
mapping
function
(像)
(自己)
(称作α的像)
线性

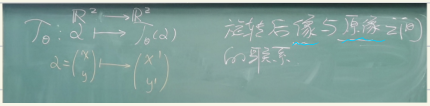
$V = P[X]_4$
$D: P[X]_4 \to P[X]_4$
e.g., $3x^2+6x-7 \mapsto 6x+6$
$D(3x^2+6x-7) = 6x+6$
$k \cdot f(x) \mapsto (kf(x))' = k f'(x) = k \cdot D(f(x))$
$f(x)+g(x) \mapsto (f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x) = Df(x) + Dg(x)$

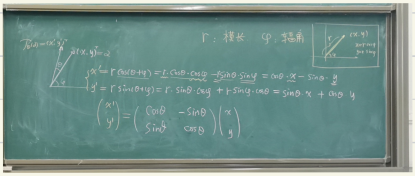
$D: P[X]_4 \to P[X]_4$
$D\,P[X]_4 = P[X]_3$
$\forall \alpha \in P[X]_4$, $\mathscr{A}\alpha \in P[X]_4$
$\mathscr{A}V = \{\mathscr{A}\alpha \mid \alpha \in V\}$
$\mathscr{A}V$ 是 $V$ 的子空间

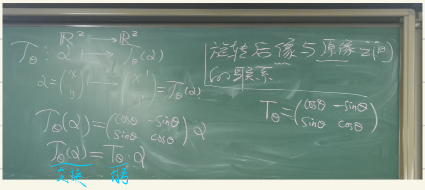
线性变换
(自己)
(称作α的像)
$\mathscr{A}(k\alpha) = k\cdot\mathscr{A}\alpha$
$\mathscr{A}(\alpha\oplus\beta) = \mathscr{A}\alpha \oplus \mathscr{A}\beta$
(x', y')
(x, y)

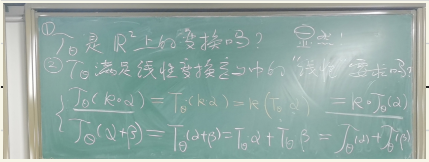
$T_\theta: \alpha \mapsto T_\theta(\alpha)$
旋转后像与原像之间的联系

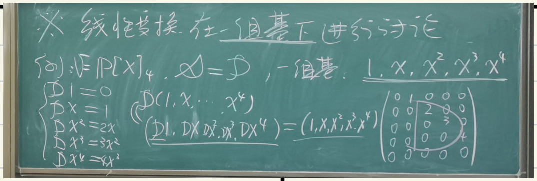
r：模长  φ：辐角
$x' = r\cos(\theta+\varphi) = r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi = \cos\theta\cdot x - \sin\theta\cdot y$
$y' = r\sin(\theta+\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi + r\sin\varphi\cos\theta = \sin\theta\cdot x + \cos\theta\cdot y$

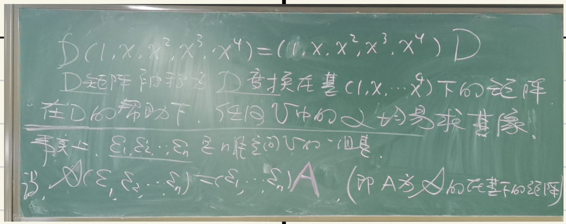
旋转后像与原像之间的联系
$T_\theta(\alpha) = T_\theta \cdot \alpha$
变换
矩阵

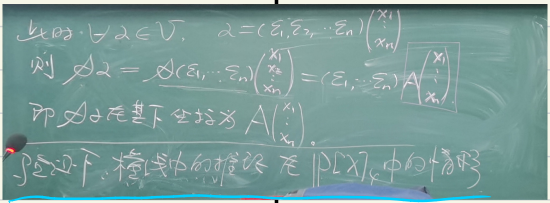
① $T_\theta$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的变换吗？ 显然！
② $T_\theta$ 满足线性变换定义中的"线性"要求吗？
$T_\theta(k\cdot\alpha) = T_\theta(k\alpha) = k(T_\theta\alpha) = k\cdot T_\theta(\alpha)$
$T_\theta(\alpha+\beta) = T_\theta(\alpha+\beta) = T_\theta\alpha + T_\theta\beta = T_\theta(\alpha)+T_\theta(\beta)$

※ 线性变换在一组基下进行讨论
例：$V = P[X]_4$，$\mathscr{A} = D$，一组基：$1, x, x^2, x^3, x^4$
$D1 = 0$
$Dx = 1$
$Dx^2 = 2x$
$Dx^3 = 3x^2$
$Dx^4 = 4x^3$

$D(1, x, x^2, x^3, x^4) = (1, x, x^2, x^3, x^4)\,D$
D矩阵即称为D变换在基$(1, x, \cdots, x^4)$下的矩阵
在D的帮助下，任何V中的α均易求其像。
事实上，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 是n维空间V的一组基
设 $\mathscr{A}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)A$（即A为$\mathscr{A}$的在基下的矩阵）

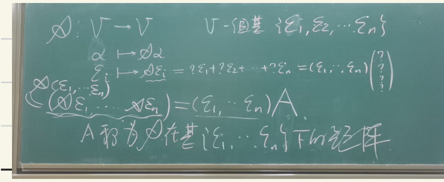
此时 $\forall \alpha \in V$，$\alpha = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$
则 $\mathscr{A}\alpha = \mathscr{A}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$
即 $\mathscr{A}\alpha$ 在基下坐标为 $A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$。

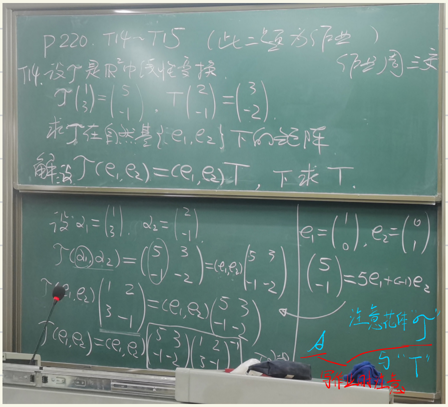
# 12月6日

14. 设 $T$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的线性变换，

$$T([1,\ 3]^T)=[5,-1]^T,\quad T([2,-1]^T)=[3,-2]^T,$$

求 $T$ 在自然基 $\{e_1,\ e_2\}$ 下的矩阵.

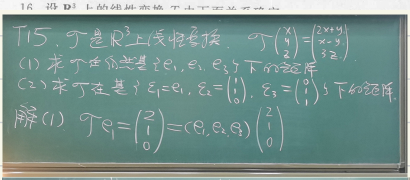


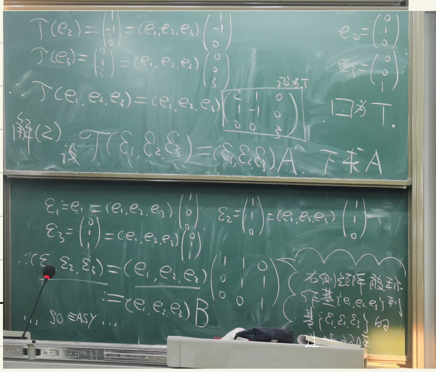



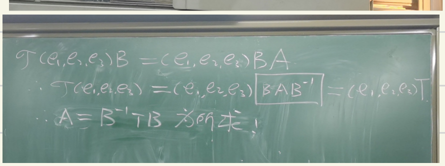

15. $T$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的线性变换，$T([x,y,z]^T)=[2x+y,\ x-y,\ 3z]^T$.

(1) 求 $T$ 在自然基 $\{e_1=[1,\ 0,\ 0]^T\ e_2=[0,\ 1,\ 0]^T, e_3=[0,\ 1,\ 0]^T\}$ 下的矩阵；

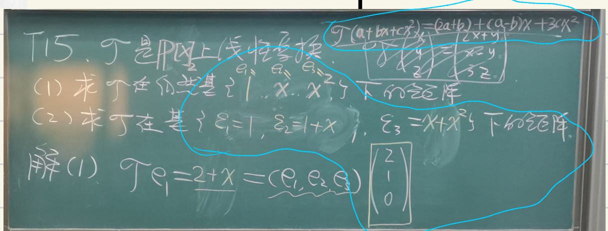
(2) 求 $T$ 在基 $\{\varepsilon_1=[1,\ 0,\ 0]^T,\ \varepsilon_2=[1,\ 1,\ 0]^T,\ \varepsilon_3=[0,\ 1,\ 1]^T\}$ 下的矩阵.

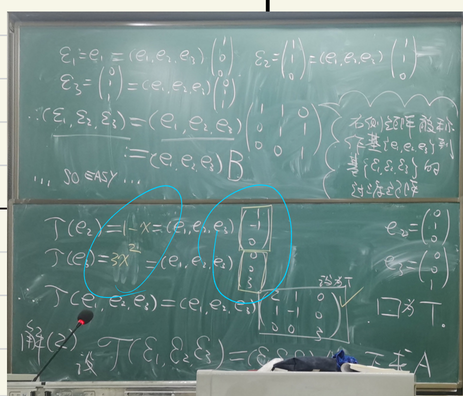


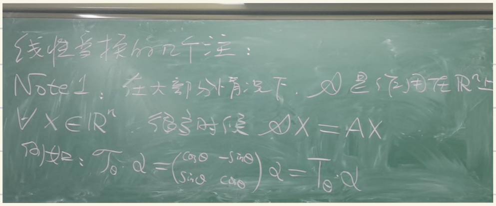



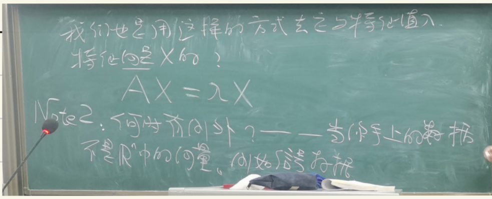



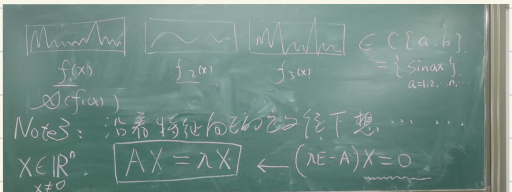

答案的形式没变

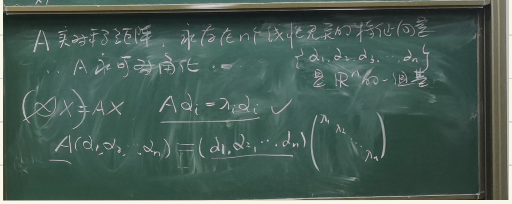


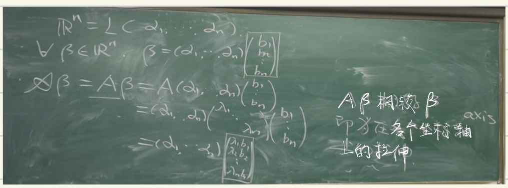



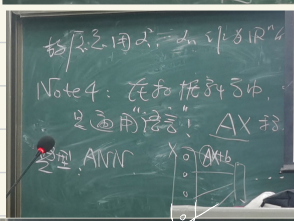


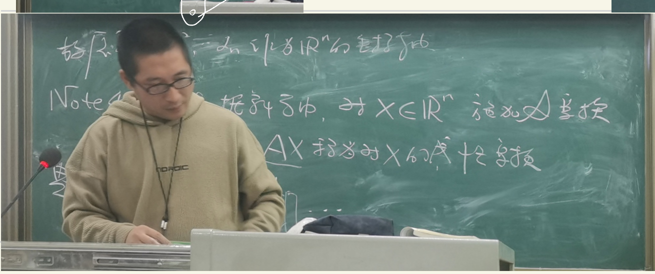



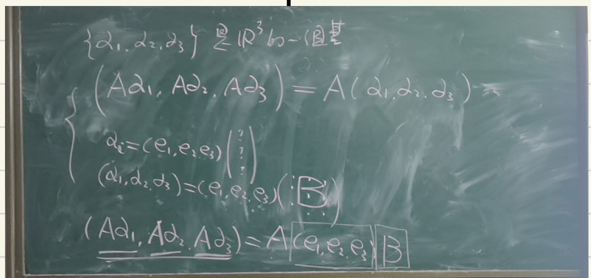



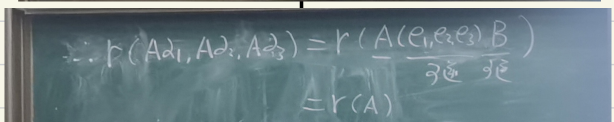




## 三、真题讲解

**（2017数学一）：**

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的3维列向量组，则向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$的秩为（　）.

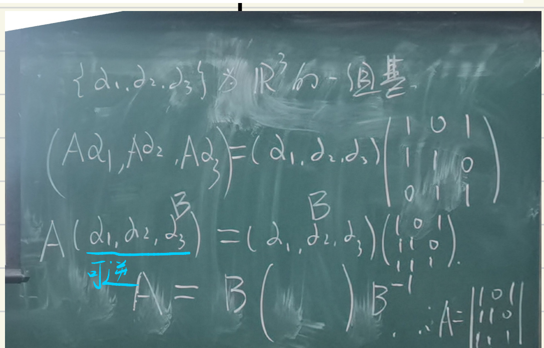



## 三、真题讲解

**（2018数学三）：**

设$A$为三阶矩阵$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关向量组.
若$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_2=\alpha_2+\alpha_3$，$A\alpha_3=\alpha_1+\alpha_3$
则$|A|=$（　）.



## 线性空间的同构

**定义：** 设U, V是两个线性空间，如果它们的元素之间有一一对应关系，且这个对应关系保持线性组合的对应，则称线性空间U与V同构。

注：同维数的线性空间必同构。

## 基变换与坐标变换

问题：在 $n$ 维线性空间 $V$ 中，任意 $n$ 个线性无关的向量都可以作为 $V$ 的一组基．对于不同的基，同一个向量的坐标是不同的．

那么，同一个向量在不同的基下的坐标有什么关系呢？换句话说，随着基的改变，向量的坐标如何改变呢？

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 及 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是线性空间 $V_n$ 的两个基，且有

$$\begin{cases} \beta_1 = p_{11}\alpha_1 + p_{21}\alpha_2 + \cdots + p_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = p_{12}\alpha_1 + p_{22}\alpha_2 + \cdots + p_{n2}\alpha_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_n = p_{1n}\alpha_1 + p_{2n}\alpha_2 + \cdots + p_{nn}\alpha_n \end{cases},$$

称此公式为基变换公式.

矩阵表示

$$(\beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \cdots \ \ \beta_n) = (\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \cdots \ \ \alpha_n)\overbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}}^{\text{记作}P}$$

第2列是 $\beta_2$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 下的坐标，
第 j 列是 $\beta_j$ 在 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 下的坐标，

36

$$\boxed{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P}$$

基变换公式

在基变换公式

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

中，矩阵 $P$ 称为由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵.

为什么？

过渡矩阵 $P$ 是可逆的.

由于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的线性无关性

37

### 坐标变换公式

定理1 设 $V_n$ 中的元素 $\alpha$，在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,$$

在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标为

$$(x_1',x_2',\cdots,x_n')^T,$$

若两个基满足关系式

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

则有坐标变换公式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}, \text{或} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

38

证明

因
$$\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P$$

所以
$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

即
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

由于p是可逆的

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

例 在 $p[x]_4$ 中取两个基

$$\alpha_1 = x^3 + 2x^2 - x \qquad \beta_1 = 2x^3 + x^2 + 1$$
$$\alpha_2 = x^3 - x^2 + x + 1 \qquad \beta_2 = x^2 + 2x + 2$$
$$\alpha_3 = -x^3 + 2x^2 + x + 1 \qquad \beta_3 = -2x^3 + x^2 + x + 2$$
$$\alpha_4 = -x^3 - x^2 + 1 \qquad \beta_4 = x^3 + 3x^2 + x + 2$$

求坐标变换公式

解 利用一组最基本的基 $x^3, x^2, x, 1$ 过渡

因为 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = (x^3,x^2,x,1)A,$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = (x^3,x^2,x,1)B,$$

40

其中
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

得 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A^{-1}B.$

故坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = B^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

用初等变换计算 $B^{-1}A$.

$$(B \mid A)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&0&-2&1&1&1&-1&-1\\1&1&1&3&2&-1&2&-1\\0&2&1&1&-1&1&1&0\\1&2&2&2&0&1&1&1\end{array}\right)$$

初等行变换 $\sim$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&1&-1&1\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1&-1&1&-1\end{array}\right)$$



$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&1&-1&1\\0&1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&1&-1&1&-1\end{array}\right)=\left(E \mid B^{-1}A\right)$$

所以 $\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1&1\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$



例

所有的二阶实上三角矩阵构成的实线性空间中下列两组向量

三维线性空间

$$\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\eta_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

1. 证明两组向量都是基

2. 求过渡矩阵

3. 求矩阵 $\eta=\begin{pmatrix}2&-1\\0&-3\end{pmatrix}$ 在两组基下的坐标



易验证 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 线性无关，并且

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

该矩阵记为P

易计算 $|P|\neq 0$ 所以 $\eta_1,\eta_2,\eta_3$ 也线性无关。

因而（1）得证，并且过渡矩阵为P.

$$\eta=\begin{pmatrix}2&-1\\0&-3\end{pmatrix}=2\varepsilon_1-\varepsilon_2-3\varepsilon_3=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

$$\eta=(\eta_1\ \eta_2\ \eta_3)P^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

因而坐标分别为 $\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ $P^{-1}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$



例 坐标变换的几何意义，设

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1/2\end{pmatrix}$$

为线性空间的两个基

又设 $\alpha=-\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2$，则 $\alpha$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\1\end{pmatrix}$$



由坐标变换公式可知，$\alpha$ 在基 $\beta_1,\beta_2$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1/2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-1/2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2\\-1\end{pmatrix}$$

即 $\alpha=\frac{1}{2}\beta_1-\beta_2$.